

# LA THÉORIE DES GROUPES ET LA GÉOMÉTRIE

Autor(en): **Cartan, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21253>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# LA THÉORIE DES GROUPES ET LA GÉOMÉTRIE<sup>1</sup>

PAR

E. CARTAN (Paris).

---

Ce serait une tâche bien ambitieuse que d'essayer de faire tenir dans une seule conférence le problème général des rapports entre la Théorie des groupes et la Géométrie. Bien que la mise en évidence de ces rapports ne remonte pas à beaucoup plus d'un demi-siècle, il n'est aucun mathématicien qui ne sache l'influence profonde exercée sur le développement de la Géométrie par les idées systématiquement développées en 1872 dans le célèbre « Programme d'Erlangen » de Félix Klein<sup>2</sup>. Aussi bien n'ai-je pas l'intention de revenir sur ces idées, qui font maintenant partie du patrimoine commun de tous les mathématiciens. Je voudrais essayer d'indiquer brièvement comment, malgré le contrecoup formidable produit en Géométrie par la Relativité généralisée, le principe directeur de Klein, convenablement généralisé, permet une nouvelle synthèse des plus importantes des théories géométriques récentes, sans parler de celles qui n'existent encore qu'en germe et attendent de l'avenir leur complet développement<sup>3</sup>. Je resterai strictement sur le terrain géométrique sans incursion dans le problème philosophique de l'espace, si brillamment traité par M. Weyl<sup>4</sup>. Je tâcherai également, à la lumière de recherches toutes récentes, de montrer comment la Géométrie permet d'aborder certains problèmes nouveaux de la théorie des groupes et éclaire par contrecoup d'un jour inattendu les Géométries de Klein les plus importantes.

---

<sup>1</sup> Conférence faite à la session de printemps de la Société mathématique suisse, tenue à Berne le 7 mai 1927.

<sup>2</sup> *Math. Ann.*, t. 43, 1893, p. 63-109; *Gesamm. Math. Abh. de F. Klein*, t. I, 1921.

<sup>3</sup> Cf. E. CARTAN, *La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle* (*Enseign. math.*, 1924-5, p. 18; traduction espagnole dans la *Revista matem. Hispano-Americana*, 1927).

<sup>4</sup> V. par exemple: H. WEYL, *Die Einzigartigkeit der Pythagorischen Massbestimmung*, *Math. Zeitschr.*, 12, 1922, p. 114-146), et *Mathematische Analyse des Raumproblems* (Berlin, Springer, 1923).



## I

L'idée fondamentale de Klein peut être rattachée, comme on sait, aux notions les plus anciennes de la science. La Géométrie élémentaire est l'étude des propriétés des figures qui sont indépendantes de leur position particulière dans l'espace. Il a fallu un grand nombre de siècles pour traduire cette phrase un peu vague en un langage précis : les propriétés qu'étudie la Géométrie élémentaire sont celles qui sont invariantes par un certain ensemble de transformations formant un groupe, à savoir les déplacements. L'axiome d'après lequel deux figures égales à une troisième sont égales entre elles exprime précisément, sous une forme en quelque sorte métaphysique, la propriété des déplacements de former un groupe. La Géométrie projective, qui constituait d'abord un simple chapitre de la Géométrie ordinaire et qui était arrivée, par son évolution même, à se constituer en doctrine autonome, est aussi pour Klein l'étude des propriétés des figures invariantes par un certain ensemble de transformations (les transformations homographiques) formant un groupe.

D'une manière générale tout groupe de transformations continu  $G$  définit une Géométrie autonome. Si l'on regarde les variables transformées par le groupe comme constituant un point d'un espace à un nombre suffisant de dimensions, cette Géométrie étudie les propriétés des figures invariantes par les transformations du groupe  $G$ , qui jouent ainsi le rôle des déplacements en Géométrie euclidienne, des homographies en Géométrie projective. Le groupe  $G$  est dit le groupe fondamental de la Géométrie. On est arrivé ainsi à constituer la Géométrie affine, la Géométrie conforme ou anallagmatique, la Géométrie de Laguerre, la Géométrie hermitienne, etc.

On a été conduit, pour la commodité du langage, à accoler au mot espace une épithète rappelant le groupe fondamental de la Géométrie étudiée ; c'est ainsi qu'on parle de l'espace euclidien, de l'espace projectif, etc. Tous les espaces de Klein, comme on les appelle, sont *homogènes*, en ce sens que leurs propriétés sont invariantes par les transformations du groupe fondamental

correspondant: c'est du reste ce groupe qui donne en quelque sorte la mesure de son homogénéité. L'espace parfaitement homogène est celui dont le groupe fondamental est le groupe infini de toutes les transformations continues: c'est l'espace de l'Analysis situs; les propriétés géométriques des figures y sont du reste relativement peu variées; elles deviennent déjà plus considérables si on prend pour groupe fondamental le groupe infini de toutes les transformations continues et dérivables. Dans un espace qui n'aurait aucune espèce d'homogénéité, c'est-à-dire dont le groupe fondamental se réduirait à la transformation identique, il n'y aurait en revanche, au sens du programme d'Erlangen, aucune science du général; toute la Géométrie se réduirait à des faits particuliers, sans lien les uns avec les autres.

## II

En marge de la riche moisson de travaux géométriques suscitée par les idées de Klein, s'est développée entre 1867 et 1914 une théorie géométrique toute différente, issue de la célèbre Dissertation inaugurale de Riemann: « Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie »<sup>1</sup>. Les points de départ des deux grands géomètres sont bien différents. Pour Klein la notion géométrique fondamentale est contenue dans l'axiome de l'égalité, interprété à la lumière de la notion de groupe. Pour Riemann, à une époque du reste où la théorie des groupes continus n'était pas fondée, la notion géométrique fondamentale est celle de longueur; mais, obéissant à la tendance générale de la Physique moderne et répugnant à l'idée de soumettre cette notion à des lois *a priori* faisant intervenir, dans chaque région de l'espace, l'espace tout entier, il suppose la longueur définie de proche en proche au moyen d'une forme différentielle, que, pour plus de simplicité, on peut supposer quadratique, mais *a priori* arbitraire. L'espace ordinaire se retrouve comme un cas tout à fait particulier des espaces plus généraux introduits par Riemann.

<sup>1</sup> La thèse inaugurale de Riemann fut soutenue sous ce titre le 10 juin 1854 devant la Faculté de Philosophie de Göttingen; elle est reproduite dans les *Gesamm. math. Werke* de Riemann (Leipzig, 1872, p. 254-269).

Il est clair que la Géométrie riemannienne, développée surtout en Allemagne et en Italie, ne rentre pas du tout dans le cadre du programme d'Erlangen, car une variété riemannienne n'admet en général aucune espèce d'homogénéité. On pourrait néanmoins essayer<sup>1</sup> de subordonner la Géométrie riemannienne à l'idée directrice de Klein en se servant d'un principe qui joue un rôle fondamental dans le programme d'Erlangen, à savoir *le principe d'adjonction*. La Géométrie de Riemann est en effet l'étude des invariants du groupe infini de toutes les transformations ponctuelles à  $n$  variables, auquel on a *adjoint* une forme différentielle quadratique déterminée. Mais raisonner ainsi serait détourner le principe d'adjonction de Klein de sa vraie signification. On sait en quoi il consiste. On peut déduire, par exemple, la Géométrie affine de la Géométrie projective en adjoignant à l'espace projectif un plan privilégié (le plan de l'infini). Cela veut dire deux choses: 1° que le groupe fondamental de la Géométrie affine est un sous-groupe du groupe projectif; 2° que ce sous-groupe est formé de toutes les transformations projectives qui laissent invariant le plan de l'infini. Rien de pareil dans la Géométrie riemannienne; les propriétés qu'elle étudie ne sont pas celles qui sont invariantes par les transformations qui conservent la forme différentielle quadratique adjointe, car en général il n'y a aucune transformation de cette nature. En poussant jusqu'au bout l'extension abusive faite du principe d'adjonction, on pourrait dire que tout problème mathématique rentre dans le cadre du programme d'Erlangen; il suffit d'adjoindre au groupe de toutes les transformations possibles les données du problème à résoudre.

A la vérité on pourrait se rapprocher des idées de Klein par les considérations suivantes. Soit  $G$  le groupe infini à  $\frac{n(n+3)}{2}$  variables  $x_i, g_{ij}$ , obtenu en adjoignant aux équations d'une transformation arbitraire portant sur les variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , celles qui indiquent comment cette transformation transforme les composantes  $g_{ij}$  du tenseur fondamental. Le groupe  $G$  est le groupe fondamental d'une Géométrie de Klein, étudiant les

<sup>1</sup> Cf. J. A. SCHOUTEN, *Erlanger Programm und Uebertragungslehre* (Rend. Circ. mat. Palermo, t. 50, 1926, p. 1-28).

propriétés d'un espace  $E$  à  $\frac{n(n+3)}{2}$  dimensions. Toute variété riemannienne peut être regardée comme une variété  $X_n$  à  $n$  dimensions plongée dans cet espace et définie par les équations qui donnent les  $g_{ij}$  en fonctions des  $x$ . Mais d'abord la Géométrie riemannienne correspondante n'est pas en toute rigueur l'étude des propriétés de la variété  $X_n$  dans ses relations avec l'espace ambiant, et, le serait-elle, elle n'en constituerait pas plus une Géométrie au sens de Klein que l'étude d'une surface particulière plongée dans l'espace euclidien, la surface des ondes, par exemple, n'en constitue une.

### III

La Relativité généralisée jeta dans la Physique et la Philosophie l'antagonisme qui existait entre les deux principes directeurs de la Géométrie, celui de Riemann et celui de Klein. Les espaces-temps de la mécanique classique et de la relativité restreinte sont du type de Klein, celui de la Relativité généralisée est du type de Riemann. Ce fait même que presque tous les phénomènes étudiés par la science depuis de nombreux siècles pouvaient s'expliquer aussi bien en se plaçant à l'un des points de vue qu'à l'autre était hautement significatif et suggérait malgré tout la possibilité d'une synthèse englobant les deux principes antagonistes.

La découverte par Levi-Civita<sup>1</sup> en 1917 du transport par parallélisme dans un espace de Riemann orienta les esprits vers une nouvelle direction. C'est en généralisant la notion du parallélisme de Levi-Civita d'une part, en poussant d'autre part à ses dernières conséquences l'idée directrice de Riemann par l'affirmation de la relativité de la longueur, que Weyl<sup>2</sup> arriva à la conception d'espaces métriques plus généraux que ceux de Riemann. Les géomètres furent surtout frappés par la fécondité de la notion du transport parallèle et on pensa être arrivé ainsi au principe constructeur de la Géométrie différentielle générale.

<sup>1</sup> T. LEVI-CIVITA, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque* (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, 42, 1917, p. 173-205).

<sup>2</sup> H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, 3<sup>te</sup> Auflage (Berlin, Springer, 1922).

Qu'une telle vue fût incomplète, l'impossibilité de fonder la Géométrie projective ou la Géométrie conforme classiques sur un tel principe le prouve avec évidence; en Géométrie projective la notion de parallélisme n'existe pas; en Géométrie conforme, la notion de vecteur disparaissant elle-même, disparaît *ipso facto* le problème du transport des vecteurs par parallélisme.

#### IV

Mais si le transport parallèle ne fournit pas par lui-même un principe assez général pour englober les différentes théories géométriques connues, il fournit du moins, envisagé d'une manière convenable, un moyen pour y parvenir.

Reprenons dans un espace de Riemann une petite région entourant un point donné A; la connaissance du  $ds^2$  de l'espace fait jusqu'à un certain point de cette région un petit morceau d'espace euclidien; on peut imaginer par exemple un repère rectangulaire d'origine A, et rapporter à ce repère tous les points M infiniment voisins de A en leur attribuant ainsi des coordonnées cartésiennes rectangulaires; les formules qui expriment la distance d'un point M à l'origine, l'angle de deux vecteurs joignant le point A à deux points M, M' infiniment voisins de A, celles qui traduisent un changement de coordonnées rectangulaires, sont exactement les mêmes que dans l'espace ordinaire. La difficulté commence quand on considère deux portions voisines de l'espace, l'une entourant un point A, l'autre un point voisin A'; elles constituent deux morceaux d'espace euclidien qui sont en quelque sorte isolés l'un de l'autre, tant qu'on n'a pas réussi à les orienter l'un par rapport à l'autre. D'une manière plus précise si nous attachons aux points A et A' deux repères rectangulaires, nous savons localiser, à la manière euclidienne, l'origine A' du second repère par rapport au premier, mais nous ne savons pas orienter les axes du second repère par rapport à ceux du premier. Le transport par parallélisme de Levi-Civita nous fournit précisément un moyen de fixer cette orientation, puisque nous savons, grâce à lui, reconnaître quand deux vecteurs d'origine A et A' doivent être regardés comme paral-

lèles. Le parallélisme de Levi-Civita ne nous fournit donc pas seulement une relation entre les vecteurs attachés à deux points infiniment voisins de l'espace, mais, et cela a une portée beaucoup plus grande, il nous permet d'intégrer dans un seul et même espace euclidien deux petits morceaux contigus de l'espace de Riemann.

Du point de vue précédent, l'espace de Riemann est donc regardé comme une collection de petits morceaux d'espaces euclidiens raccordés de proche en proche les uns avec les autres. Ce qui est essentiel à remarquer, c'est que le raccord se fait nécessairement *en série linéaire*. Etant donnés deux points A et B de l'espace reliés entre eux par un arc de courbe continu (C), on peut regarder la ligne (C) et toute la région de l'espace qui l'avoiisine immédiatement comme faisant partie d'un seul et même espace euclidien; ou, si l'on veut, pour employer une expression suggestive, on peut développer cette région de l'espace sur un espace euclidien fictif, l'espace euclidien tangent en A à l'espace riemannien. Le fait que l'espace donné n'est pas euclidien se traduit par le fait que le développement d'un autre arc de courbe (C') joignant A à B ne donnera pas, pour le point B et la petite région environnante, la même position qu'auparavant dans l'espace euclidien tangent en A.

La possibilité de raccorder dans un même espace euclidien deux morceaux contigus de l'espace de Riemann peut s'exprimer en disant que c'est un espace à connexion euclidienne. Le fait que le raccord de deux morceaux non contigus entourant deux points A et B se fait de proche en proche et dépend du chemin suivi pour aller de A en B peut s'exprimer en disant que l'espace de Riemann est un espace euclidien *non holonome*.

Revenons maintenant au point de vue de Klein. L'espace euclidien ordinaire est un espace de Klein dont le groupe fondamental G est le groupe des déplacements. C'est ce groupe qui contient l'essence de la géométrie ordinaire. Les équations fondamentales qui régissent le déplacement à plusieurs paramètres d'un trièdre mobile ne sont autres que les équations de structure du groupe G, au sens que j'ai donné à ce mot dans ma théorie de la structure des groupes continus, et la théorie des courbes, des surfaces, des congruences et des complexes de

droites, etc., n'est au fond qu'une simple conséquence analytique de ces équations fondamentales. Dans un espace de Riemann à chaque point duquel on a attaché un repère rectangulaire, le passage d'un repère à un repère infiniment voisin se fait aussi par une transformation du groupe  $G$ , transformation qu'on peut décomposer en une translation et une rotation; la translation est donnée immédiatement par le  $ds^2$  de l'espace, la rotation est donnée par le transport parallèle de Levi-Civita. On peut donc dire que l'espace de Riemann admet le même groupe fondamental  $G$  que l'espace euclidien, mais la transformation de  $G$  qui fait passer d'un repère à un autre n'est définie que de proche en proche et n'a de sens que si on se donne le chemin joignant les origines des deux repères. L'espace de Riemann est un espace non holonome à groupe fondamental  $G$ .

## V

Il n'y a maintenant aucune difficulté à imaginer des espaces non holonomes à groupe fondamental quelconque<sup>1</sup>. Un espace projectif non holonome, par exemple, s'obtiendra en attachant *in abstracto* à chaque point d'une variété numérique un espace projectif (espace tangent) et en se donnant une loi permettant d'intégrer dans un seul et même espace projectif les deux espaces projectifs attachés à deux points infiniment voisins. Si par exemple on attache à chacun d'eux un repère projectif (tétraèdre de référence), la loi de raccord se traduira analytiquement par une transformation (infiniment petite) du groupe projectif, qui joue ainsi le rôle du groupe fondamental. Il est clair que la notion ainsi obtenue d'espace à connexion projective dépasse la notion de transport parallèle, bien qu'on puisse utiliser, comme l'a fait M. Schouten, la propriété du groupe projectif d'être mis sous forme linéaire pour appliquer la théorie analytique générale des transports parallèles à l'exposition de la théorie des espaces à connexion projective.

Les espaces de Weyl rentrent dans la théorie générale précé-

<sup>1</sup> Cf. E. CARTAN, *Les espaces à connexion conforme* (*Ann. Soc. polon. de math.*, 1923, p. 171-221): *Sur les variétés à connexion projective* (*Bull. Soc. Math.*, 52, 1924, p. 205-241).



dente; il suffit de prendre comme groupe fondamental, non pas le groupe des déplacements, mais le groupe des déplacements et des similitudes de l'espace ordinaire.

Une propriété commune à tous les espaces non holonomes à groupe fondamental est la suivante. Si l'on considère un arc de courbe AB, la région de l'espace environnant immédiatement cet arc de courbe peut être regardée comme faisant partie d'un seul et même espace de Klein. Par suite, la théorie des courbes est identiquement la même dans un espace non holonome que dans un espace holonome au même groupe fondamental. Les classes remarquables de courbes dans l'espace holonome ont leurs analogues dans l'espace non holonome. C'est ainsi que les droites, qui existent en Géométrie euclidienne, en Géométrie affine, en Géométrie projective, ont leurs analogues dans les espaces à connexion euclidienne, affine, projective: ce sont les géodésiques de ces espaces, qu'on peut définir comme les lignes se développant suivant des droites. Dans un espace de Riemann à trois dimensions, les notions de courbure et de torsion d'une ligne s'étendent elles-mêmes; dans un espace de Weyl celles qui les remplacent sont les deux invariants fondamentaux d'une courbe euclidienne par rapport au groupe des similitudes. A un autre point de vue, on pourrait imaginer des espaces à groupe fondamental à une dimension; ces espaces sont nécessairement holonomes.

La non holonomie d'un espace ne se révèle que si on le développe suivant deux arcs de courbe distincts joignant les deux mêmes points, ou encore, ce qui revient au même, si on le développe suivant un contour fermé ou cycle. A un tel cycle, issu d'un point A par exemple et y revenant, est associée, dans l'espace holonome tangent en A, une transformation du groupe fondamental qui révèle la non holonomie de l'espace le long du cycle. Si ce cycle est infinitésimal, la transformation associée est aussi infinitésimale et définit la courbure riemannienne de l'espace le long du cycle. Un cas particulier important est celui où cette transformation infinitésimale laisse fixe le point A; j'ai proposé de dire que l'espace non holonome est alors *sans torsion*. C'est ce qui se passe pour les espaces de Riemann, dont la connexion euclidienne est définie au moyen du parallélisme de Levi-Civita;



c'est également ce qui se passe pour les espaces de Weyl. Dans le cas des espaces à connexion affine, qui comprennent en particulier les espaces précédents, la transformation associée à un cycle infinitésimal peut se décomposer en une translation (appliquée au point A) et une rotation affine. La translation définit la torsion de l'espace, la rotation sa courbure. Un espace à connexion affine sans courbure est un espace dans lequel le parallélisme de deux vecteurs a une signification *absolue*, indépendante du chemin par lequel on relie leurs deux origines. Nous verrons tout à l'heure que ces espaces sans courbure ont des applications importantes.

## VI

Nous avons implicitement parlé jusqu'à présent des espaces non holonomes *ponctuels*. On s'est habitué depuis longtemps, en Géométrie projective, par exemple, à attribuer à l'espace d'autres éléments générateurs que le point, par exemple le plan, ou la droite. La nature de l'élément générateur ne joue du reste qu'un rôle accessoire et n'atteint pas l'essence de la Géométrie; le groupe fondamental change de forme analytique avec le changement de l'élément générateur de l'espace, mais sa structure reste la même et c'est en elle que résident les propriétés intimes de la Géométrie correspondante.

Dans le cas des espaces non holonomes, le choix de l'élément générateur joue au contraire un rôle essentiel. Un espace de Riemann est un espace euclidien *ponctuel* non holonome. On peut imaginer un espace euclidien *tangentiel* (c'est-à-dire engendré par des plans) non holonome; sa géométrie diffère profondément de la géométrie riemannienne. Un espace à courbure constante de Cayley-Klein, dans lequel le point est pris comme élément générateur, est un espace euclidien non holonome; mais si on prend au contraire le plan comme élément générateur, il n'en est plus de même, car la figure formée des plans infiniment voisins d'un plan donné ne jouit pas du tout des mêmes propriétés infinitésimales que la figure analogue dans l'espace euclidien. Dans un espace de Cayley à courbure positive, deux plans infiniment voisins ont un invariant qui est une forme différen-

tielle quadratique ternaire définie positive (c'est par exemple le carré de la distance de leurs pôles par rapport à l'absolu); dans l'espace euclidien, l'invariant de deux plans est l'angle infiniment petit de leurs normales, qui ne fait intervenir que deux différentielles indépendantes au lieu de trois; en un certain sens l'espace euclidien, en tant qu'engendré par les plans, est *moins rigide* que l'espace à courbure constante.

On conçoit d'après cela la très grande variété des géométries non holonomes possibles; un très petit nombre d'entre elles ont été envisagées jusqu'à présent.

Ce qui précède s'éclaircira peut-être par un exemple particulier. Partons du groupe projectif du plan. Nous aurons une première classe d'espaces non holonomes à deux dimensions en prenant le point pour élément générateur; les espaces obtenus admettent des géodésiques, qui, lorsqu'on rapporte l'espace à un système quelconque de coordonnées ponctuelles  $x$  et  $y$ , sont les courbes intégrales d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + A(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + B(x, y) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + C(x, y) \frac{dy}{dx} + D(x, y) = 0 .$$

Inversement, étant donnée une équation différentielle de cette forme, on peut trouver une infinité de connexions projectives faisant des courbes intégrales de cette équation les géodésiques de l'espace correspondant; parmi toutes ces connexions il en est du reste une privilégiée, pour laquelle le déplacement projectif associé à un cycle infinitésimal d'origine  $A$  laisse invariant le point  $A$ , ainsi que toutes les droites issues de  $A$ .

Prenons maintenant, avec le même groupe fondamental, non pas le point, mais l'élément de contact de Lie (ensemble d'un point et d'une droite passant par ce point) comme élément générateur. Nous arriverons alors à des espaces d'éléments (à trois dimensions) à connexion projective. Cette fois nous pourrons nous arranger pour que les géodésiques (correspondant aux droites du plan projectif envisagées comme lieux d'éléments de contact) soient les courbes intégrales d'une équation différentielle du second ordre absolument quelconque, de sorte que nous pourrons géométriser la théorie des invariants d'une équation différen-

tielle du second ordre vis-à-vis du groupe des transformations ponctuelles les plus générales.

Dans l'exemple précédent l'espace était un lieu d'éléments de contact; le groupe fondamental était le groupe de transformations de contact résultant du prolongement, au sens de Lie, du groupe projectif ponctuel. Il n'y a naturellement aucune difficulté à partir d'un groupe de transformations de contact irréductible quelconque, par exemple le groupe des transformations de contact qui changent les sphères orientées en sphères orientées; on bâtirait avec lui des espaces non holonomes, en prenant comme élément générateur l'élément de contact par exemple, ou encore la sphère orientée, etc.

## VII

Les espaces non holonomes ont été envisagées jusqu'ici *in abstracto*; la connexion qui sert à les définir est une loi interne. C'est H. Weyl qui le premier a défini le transport par parallélisme par une propriété interne de l'espace. Levi-Civita se plaçait au contraire à un point de vue tout différent qui, bien qu'inférieur philosophiquement à celui de Weyl, a une très grande importance en Géométrie; il se rattache à la théorie générale des connexions induites dont je dirai seulement quelques mots.

Avant d'indiquer la manière de procéder de Levi-Civita, nous pouvons la faire pressentir sur un exemple extrêmement élémentaire. Considérons une courbe tracée dans un plan ordinaire (euclidien); la présence de la courbe dans le plan permet de définir sur cette courbe une abscisse curviligne. Oublions maintenant que la courbe est dans le plan et considérons-la en elle-même; rien ne la distingue d'une droite euclidienne; la formule de Chasles qui lie les abscisses de trois points d'une droite lie également les abscisses curvilignes de trois points de la courbe. La présence de la courbe dans le plan euclidien nous a donc donné le moyen de faire de cette courbe un espace euclidien à 1 dimension. Nous pouvons du reste nous représenter physiquement le mécanisme de l'opération en déroulant ou développant la courbe sur une de ses tangentes; nous pouvons aussi définir chaque stade

infinitésimal de ce développement en faisant correspondre à tout point  $M$  infiniment voisin d'un point  $A$  le point  $M'$  de la tangente en  $A$  qui est la projection orthogonale de  $M$ .

Si nous prenons maintenant une surface plongée dans l'espace ordinaire, nous pourrions de même essayer de développer la surface sur le plan tangent en un de ses points  $A$ . Si la surface est développable, le développement sera possible; sinon on pourra toujours l'effectuer le long d'un arc de courbe  $AB$ , ce qui revient à développer la surface développable circonscrite à la surface le long de  $AB$ , mais le développement le long d'un autre arc de courbe joignant  $A$  à  $B$  ne conduirait pas au même résultat final: le développement n'est pas holonome. Nous pouvons donc regarder la surface plongée dans l'espace euclidien comme un plan euclidien non holonome; l'intégration en un seul même plan euclidien des points infiniment voisins de  $A$  et des vecteurs issus de ces points peut s'obtenir très simplement par projection orthogonale de la surface sur le plan tangent en  $A$ . Là encore la présence de la surface dans l'espace euclidien permet de doter la surface d'une connexion euclidienne *induite*; si nous oublions ensuite l'espace ambiant pour ne considérer que la surface en elle-même avec la connexion euclidienne que nous lui avons attribuée, nous obtenons tout simplement un espace de Riemann à deux dimensions, dont le  $ds^2$  est celui de la surface, avec le transport par parallélisme de Levi-Civita: deux vecteurs tangents issus de  $A$  et de  $M$  sont parallèles si la projection du second sur le plan tangent en  $A$  est parallèle au premier vecteur. Nous remarquerons que l'espace euclidien (ici plan euclidien) tangent en un point, a maintenant une signification *concrète*, tandis que du premier point de vue, il est purement fictif.

La notion de connexion induite peut être appliquée de beaucoup de manières différentes et elle semble devoir jouer un rôle très important dans les théories géométriques classiques. J'en citerai quelques exemples simples.

Prenons, en Géométrie conforme plane, une courbe quelconque  $(C)$ ; on peut développer cette courbe sur le cercle osculateur en un de ses points, autrement dit on peut regarder la courbe comme un espace conforme à une dimension (cercle). Le développement ne se fait naturellement pas au sens ordinaire, métrique du mot,

avec conservation des longueurs d'arcs, puisque la longueur d'un arc n'a pas de sens en Géométrie conforme. Les choses peuvent être présentées d'une manière peu rigoureuse, mais assez élémentaire. Prenons sur la courbe trois points très voisins  $A, A_1, A_2$ ; ils peuvent être regardés comme appartenant au cercle osculateur à la courbe en  $A$ ; soit maintenant  $A_3$  un quatrième point très voisin des trois premiers; la droite qui joint le centre du cercle osculateur au point  $A_3$  coupe ce cercle en un point  $A'_3$  qu'on fera correspondre à  $A_3$  dans le développement de la courbe; on pourra, du reste, remplacer la droite par un cercle passant par deux points fixes donnés inverses l'un de l'autre par rapport au cercle osculateur. Amenons par une transformation conforme les trois points  $A_1, A_2, A_3$  à coïncider avec  $A_1, A_2, A'_3$ ; la courbe prendra une nouvelle position et on pourra recommencer pour un cinquième point de la courbe la construction de tout à l'heure qui le fera correspondre à un cinquième point  $A'_4$  du cercle et ainsi de suite. Analytiquement, il existe sur un cercle un paramètre projectif défini à une transformation homographique près: c'est le paramètre en fonctions duquel les coordonnées d'un point de la courbe s'expriment rationnellement. On pourra donc définir sur une courbe plane quelconque un paramètre projectif, grâce auquel on connaîtra le rapport anharmonique de quatre points de la courbe. Analytiquement, ce paramètre s'obtient très simplement comme le quotient de deux solutions particulières de l'équation différentielle

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{u}{4\rho^2} = 0,$$

où  $s$  désigne l'arc de la courbe et  $\rho$  le rayon de courbure.

En Géométrie projective plane, on peut de même développer projectivement une courbe quelconque sur la conique osculatrice et définir également ainsi le rapport anharmonique de quatre points de la courbe. Mais ici ce développement n'intéresse pas seulement la courbe donnée, mais tout le plan qui en est un certain sens solidaire et qui se trouve ainsi muni d'une métrique cayleyenne à courbure constante. En effet, par un point quelconque  $P$  du plan menons une tangente  $PA$  à la courbe et traçons la

conique osculatrice à la courbe en  $A$ ; elle peut être regardée comme l'absolu d'une géométrie cayleyenne; la distance cayleyenne du point  $P$  à un point infiniment voisin  $P'$  sera le logarithme du rapport anharmonique des deux points  $P, P'$  et des deux points où la droite  $PP'$  coupe la conique. Naturellement le  $ds^2$  du plan est indéfini et n'existe que dans les régions du plan d'où on peut mener une tangente à la courbe; la direction  $PA$  est isotrope, la seconde direction isotrope en  $P$  est celle de la seconde tangente menée de  $P$  à la conique osculatrice en  $A$ . Les géodésiques de la métrique ne sont plus en général des droites. L'adjonction d'une courbe quelconque nous a permis ici de faire du plan un espace cayleyen à deux dimensions; cet espace est holonome, parce que la connexion cayleyenne du plan est commandée par le développement de la courbe donnée sur sa conique osculatrice, et ce développement est nécessairement holonome, puisque la courbe n'a qu'une dimension.

On peut de même, dans l'espace projectif à trois dimensions, développer une surface sur la quadrique de Lie; le développement n'est plus holonome, à moins que la surface ne soit réglée: dans ce dernier cas, en effet, la quadrique de Lie est la même tout le long d'une même génératrice; on n'a en réalité à faire qu'à une variété (de droites) à une dimension, ce qui entraîne nécessairement l'holonomie.

## VIII

Revenons maintenant aux espaces non holonomes à groupe fondamental  $G$ . Comme nous l'avons vu, à tout cycle partant d'un point  $A$  de l'espace et y revenant est associée une transformation du groupe  $G$ , transformation qui opère dans l'espace holonome tangent en  $A$ . À l'ensemble des cycles issus de  $A$  est donc associé un ensemble de transformation de  $G$ , qu'on démontre facilement former un groupe  $g$ : c'est le *groupe d'holonomie* de l'espace, qui est essentiellement le même en tous les points  $A$ . Le groupe  $g$  donne en quelque sorte une mesure de la non holonomie de l'espace; s'il se réduit à la transformation identique, c'est qu'on a un espace de Klein. On a donc là un principe de classification des espaces à groupe fondamental donné, de même

que le groupe de Galois d'une équation algébrique permet en gros une classification suivant le degré d'irrationalité des racines.

Les transformations infinitésimales de  $G$  associées aux cycles infinitésimaux appartiennent au groupe d'holonomie, mais elles ne fournissent pas toujours toutes les transformations infinitésimales génératrices de ce groupe. Néanmoins, si elles sont toutes nulles, c'est-à-dire si la courbure riemannienne de l'espace est partout nulle, le groupe d'holonomie se réduit à la transformation identique et l'espace est holonome. Cette conclusion peut se démontrer facilement par le calcul ou par un raisonnement géométrique approché. Mais ici interviennent des considérations d'Analysis situs; la conclusion n'est rigoureuse que si l'espace est simplement connexe, c'est-à-dire si tous les cycles peuvent, par déformation continue, être réduits à zéro. Dans le cas contraire, l'espace peut avoir partout sa courbure riemannienne nulle sans être vraiment holonome. Un exemple classique est fourni par un cylindre de révolution plongé dans l'espace ordinaire; son développement le long d'un cycle sur un de ses plans tangents est holonome si le cycle est réductible à zéro, mais le développement le long d'une section droite a pour effet de faire subir au point de départ  $A$  une translation finie; le groupe d'holonomie est formé des puissances de cette translation. Les mêmes considérations s'appliqueraient à ce qu'on est convenu d'appeler les *formes de Clifford* de l'espace euclidien. On pourrait aussi imaginer, *in abstracto*, sur un cylindre une connexion (non induite) de Weyl, dont la courbure riemannienne soit partout nulle sans que cependant l'espace à deux dimensions constitué par le cylindre doué de cette connexion soit intégralement euclidien, ni même riemannien; seulement, ce n'est qu'en faisant le tour du monde qu'un habitant de cet espace pourrait s'apercevoir que son univers n'est ni euclidien, ni riemannien.

Le principe de classification des espaces d'après leur groupe d'holonomie peut être rattaché au principe d'adjonction ou de subordination de Klein. Une Géométrie de Klein est subordonnée à une autre si le groupe fondamental de la première est un sous-groupe de celui de la seconde. Par exemple, la Géométrie affine est subordonnée à la Géométrie projective, c'est si l'on veut, un chapitre particulier de la Géométrie projective dans lequel on étudie



les propriétés des figures contenant le plan de l'infini; on pourrait, du reste, imaginer une infinité de Géométries affines dans un même espace projectif, suivant le plan auquel on voudrait faire jouer le rôle du plan de l'infini. Si l'on est maintenant dans un espace projectif non holonome, les choses ne se passent plus de la même manière; pour qu'on puisse dans cet espace imaginer une Géométrie affine, il faut qu'on puisse y choisir des repères projectifs liés entre eux suivant une loi affine; pour cela, il est nécessaire et suffisant que le groupe d'holonomie de l'espace soit un groupe affine, ce qui n'arrive pas toujours. D'une manière générale, tout espace non holonome à groupe fondamental  $G$ , admettant pour groupe d'holonomie un sous groupe  $g$  de  $G$ , pourra être regardé comme un espace non holonome admettant pour groupe fondamental tout sous groupe de  $G$  contenant lui-même  $g$  comme sous-groupe. C'est ainsi qu'un espace de Weyl peut être regardé comme riemannien, si son groupe d'holonomie ne contient que des déplacements, sans homothétie.

## IX

Comme on le voit, l'importance de la notion de groupe n'a pas été réduite par les développements récents de la Géométrie différentielle; il semble bien qu'elle seule au contraire soit capable de les embrasser dans une même synthèse. Je voudrais maintenant aussi brièvement que possible, donner un aperçu des services que peuvent rendre à la théorie des groupes elle-même les notions nouvelles de la Géométrie différentielle.

Considérons un groupe de transformations continu  $G$  à  $r$  paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_r$  et représentons chaque transformation du groupe par un point  $(a_1, \dots, a_r)$  d'un espace à  $r$  dimensions, que nous appellerons l'espace du groupe. Dans un article récent <sup>1</sup>, nous avons, M. Schouten et moi, indiqué comment on pouvait doter cet espace de trois connexions affines remarquables intrinsèquement liées aux propriétés du groupe; j'ai développé plus longuement cette étude dans un mémoire qui vient de paraître <sup>2</sup>.

<sup>1</sup> E. CARTAN and J. A. SCHOUTEN, *On the Geometry of the Group-manifold of simple and semi-simple groups* (Proc. Akad. Amsterdam, 29, 1926; p. 803-815).

<sup>2</sup> E. CARTAN, *La Géométrie des groupes de transformations* (Journal Math., 6, 1927, p. 1-119).



Chacune de ces connexions fait de l'espace du groupe un espace affine non holonome. Deux de ces connexions sont *sans courbure*, ce qui, comme je l'ai déjà dit, signifie que le parallélisme des vecteurs y a une signification absolue. Leur définition est très simple. Rappelons que le produit de deux transformations dépend en général de l'ordre dans lequel elles sont effectuées, de sorte que l'opération inverse de la multiplication est possible de deux manières; on peut prendre comme quotient de deux transformations  $S'$  et  $S$  soit la transformation  $S'S^{-1}$ , soit la transformation  $S^{-1}S'$ . Cela posé un vecteur de l'espace du groupe est défini par les deux transformations  $S$  et  $S'$  que représentent son origine et son extrémité; deux vecteurs  $(S, S')$  et  $(T, T')$  seront dits équipollents de première ou de seconde espèce suivant qu'on aura

$$S'S^{-1} = T'T^{-1} \quad \text{ou} \quad S^{-1}S' = T^{-1}T';$$

chacune de ces espèces d'équipollence définit une des deux connexions sans courbure de l'espace du groupe; elles comportent au contraire chacune une torsion et ces deux torsions sont égales et opposées. Quant à la troisième connexion, elle est sans torsion, mais elle comporte une courbure, et l'équipollence de deux vecteurs ne peut s'y définir que de proche en proche.

Les géodésiques de l'espace du groupe sont les mêmes dans les trois connexions; elles sont liées aux sous-groupes à un paramètre du groupe donné; aux sous-groupes à plusieurs paramètres sont également liées des variétés *totale-ment géodésiques*, c'est-à-dire telles que toute géodésique qui y a deux de ses points y est contenue tout entière; mais il existe d'autres variétés totalement géodésiques que celles qui proviennent des sous-groupes de  $G$ , et elles jouent dans la théorie des groupes un rôle qu'on n'avait pas encore soupçonné.

Beaucoup de notions et de théorèmes fondamentaux de la théorie des groupes prennent de cette manière un caractère géométrique inattendu. C'est ainsi que les constantes de structure du groupe sont celles qui définissent la torsion de l'un quelconque des espaces sans courbure du groupe; deux groupes qui admettent le même espace sans courbure sont isomorphes. Au contraire, il peut arriver que deux groupes admettent le

même espace sans torsion sans être isomorphes; l'identité des espaces sans torsion de deux groupes définit par suite une sorte d'isomorphisme plus général que l'isomorphisme classique et qu'on pourrait appeler l'isomorphisme affine. On peut aussi définir un isomorphisme projectif en dotant l'espace du groupe d'une connexion projective liée au groupe d'une manière invariante.

Parmi les groupes continus, une classe est particulièrement importante, c'est celle des groupes simples ou semi-simples. Les espaces sans torsion de ces groupes sont riemanniens, avec un  $ds^2$  qui n'est pas nécessairement défini. Ils font partie d'une catégorie plus générale d'espaces riemanniens, caractérisés par la propriété que le transport par parallélisme y conserve la courbure riemannienne. Chose curieuse, cette propriété est équivalente à la suivante, qui paraît de nature beaucoup moins restrictive: la symétrie par rapport à un point quelconque de l'espace est une transformation *isométrique*, c'est-à-dire laisse invariant le  $ds^2$  de l'espace.

La détermination de tous les espaces de Riemann à  $ds^2$  défini positif dont la courbure riemannienne est conservée par le transport parallèle peut être faite complètement<sup>1</sup>; les plus généraux peuvent se déduire très simplement de certains d'entre eux, de dimensions moindres, et qui sont, en ce sens, *irréductibles*. Ce sont ces espaces de Riemann irréductibles qui nous ouvrent les vues les plus inattendues sur certains problèmes importants de la théorie des groupes simples, d'une part, sur des théories classiques de la Géométrie d'autre part. Je les désignerai pour abrégé sous le nom d'espaces  $\mathcal{E}$ .

## X

Pour bien comprendre le rôle joué par les espaces  $\mathcal{E}$ , quelques remarques préliminaires sur les groupes simples ne seront pas inutiles. A chaque structure simple d'ordre  $r$  correspond d'abord

<sup>1</sup> Elle fait l'objet d'un mémoire récent (*Bull. Soc. Math.*, 54, 1926, p. 214-264, et 55, 1927, p. 114-134). V. aussi E. CARTAN, *Sur les espaces de Riemann dans lesquels le transport par parallélisme conserve la courbure* (*Rend. Acc. Lincei*, 6<sup>me</sup> série, 31, 1926, p. 544-547).

un groupe à  $r$  paramètres *complexes*  $a_1, \dots, a_r$  (en réalité une infinité, mais tous isomorphes entre eux). Mais il peut aussi lui correspondre des groupes obtenus en prenant pour  $a_1, \dots, a_r$  des fonctions analytiques convenablement choisies de  $r$  paramètres réels  $a_1, \dots, a_r$ ; nous dirons pour abrégé que le groupe est *complexe* dans le premier cas, *réel* dans le second cas. Par exemple les groupes de toutes les transformations homographiques complexes ou réelles de  $n$  variables sont respectivement complexe et réel, mais correspondent à la même structure.

A une structure simple donnée correspondent plusieurs formes réelles distinctes, irréductibles l'une à l'autre; en particulier au groupe homographique complexe de  $n$  variables correspondent le groupe homographique réel de  $n$  variables, et aussi les groupes linéaires unimodulaires d'une forme d'Hermite à  $n + 1$  variables, définie ou indéfinie. Bien que les variables soient complexes, ces derniers groupes sont dits *réels* parce qu'on porte son attention sur les  $(n + 1)^2 - 1$  quantités réelles dont dépendent les paramètres de leurs substitutions.

J'ai déterminé en 1914 <sup>1</sup> toutes les formes réelles distinctes correspondant à une même structure simple. Parmi toutes ces formes il y en a une dont H. Weyl a montré l'extrême importance <sup>2</sup>, c'est la forme dite *unitaire*; le domaine d'un groupe réel unitaire est *fermé* tandis que ceux des autres groupes réels sont *ouverts*. Il y a donc lieu en résumé de distinguer pour une structure simple donnée, une forme *complexe*, une forme réelle *unitaire* et plusieurs formes réelles *non unitaires*.

Revenons maintenant aux espaces  $\mathcal{E}$ . Un premier résultat remarquable, c'est que leur détermination revient à celle des différentes formes réelles correspondant aux différentes structures simples possibles. D'une manière plus précise à la forme complexe et à chacune des formes réelles non unitaires d'une structure simple donnée correspondent deux classes d'espaces  $\mathcal{E}$ ; ceux de la première classe ont leur courbure riemannienne partout positive ou nulle; ceux de la seconde classe ont leur

<sup>1</sup> E. CARTAN, *Les groupes réels simples, finis et continus* (Ann. Ec. Norm., 3<sup>me</sup> série, 31, 1914, p. 263-355).

<sup>2</sup> H. WEYL, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen* (Math. Zeitschr., 23, 1925, p. 271-309; 24, 1925, p. 328-395).

courbure riemannienne partout négative ou nulle; dans chaque classe on n'a du reste essentiellement qu'un seul espace, car on passe de l'un à l'autre en changeant simplement l'unité de longueur.

C'est surtout des espaces  $\mathcal{E}$  à courbure négative que je vous parlerai. Tous ces espaces ont une métrique partout régulière; ils sont simplement connexes et jouissent de la propriété que par deux points quelconques il passe une géodésique et une seule. Chacun d'eux admet un groupe des déplacements qui est tout simplement le groupe complexe ou réel non unitaire auquel il correspond: dans le premier cas son groupe des déplacements est à  $2r$  paramètres réels, dans le second cas il n'est qu'à  $r$  paramètres réels. Le groupe des déplacements des espaces  $\mathcal{E}$  à courbure positive est au contraire toujours le groupe réel unitaire correspondant. Pour les uns et les autres le groupe des rotations isométriques autour d'un point (groupe d'isotropie) est simple unitaire ou se décompose en groupes simples unitaires.

## XI

Je signalerai seulement deux problèmes de la théorie des groupes que la considération des espaces  $\mathcal{E}$  permet d'aborder avec succès.

On sait que, pour S. Lie, tout groupe continu est engendré par des transformations infinitésimales; en fait toute transformation finie suffisamment voisine de la transformation identique peut être obtenue en répétant une infinité de fois une même transformation infiniment petite, de même qu'une rotation d'un angle fini  $\alpha$  autour d'un axe peut être obtenue en répétant une infinité de fois une rotation d'un angle infiniment petit autour de cet axe. Mais il y a des cas où toute une partie des transformations finies du groupe échappe à cette génération. Par exemple la substitution unimodulaire réelle à trois variables

$$x' = ax, \quad y' = by, \quad z' = cz, \quad (abc = 1)$$

où  $a$  est positif,  $b$  et  $c$  sont négatifs, ne peut pas être engendrée par une substitution linéaire réelle infinitésimale.

Pour les structures simples en particulier, le groupe complexe et le groupe réel unitaire s'engendrent complètement au moyen de leurs transformations infinitésimales, tandis qu'il n'en est plus de même en général pour les groupes réels non unitaires. Il est vrai que toute transformation finie peut être regardée comme le produit d'un certain nombre de transformations admettant chacune une transformation infinitésimale génératrice, mais on ne sait pas *a priori* si ce nombre est borné. Or l'existence des espaces  $\mathcal{E}$  à courbure négative nous donne à cet égard un renseignement précis et très simple.

Soit en effet  $G$  un groupe réel non unitaire et  $\mathcal{E}$  l'espace à courbure négative dont  $G$  est le groupe des déplacements. Fixons un point  $O$  de l'espace. Parmi les déplacements de l'espace nous distinguerons les rotations autour de  $O$  et les *transvections* : je désigne sous ce nom un déplacement dans lequel une géodésique glisse sur elle-même, les vecteurs issus de ses points se transportant parallèlement à eux-mêmes au sens de Levi-Civita ; la géodésique considérée sera dite la *base* de la transvection. Cela posé tout déplacement peut être décomposé d'une manière et d'une seule en une rotation autour de  $O$  et une transvection ayant pour base une géodésique passant par  $O$ . Or chacun de ces déplacements composants admet un déplacement infinitésimal générateur (rotation ou transvection infinitésimale). Par suite toute transformation finie de  $G$  peut être décomposée d'une manière et d'une seule en deux transformations admettant chacune une transformation infinitésimale génératrice. Par exemple toute substitution linéaire unimodulaire réelle peut être décomposée d'une manière et d'une seule en une substitution orthogonale et une substitution symétrique positive (c'est-à-dire dont l'équation *séculaire* ait toutes ses racines réelles et positives).

## XII

Le second problème que je voulais signaler est le suivant. J'ai dit qu'à une structure (infinitésimale) donnée correspondent une infinité de groupes  $G$ , mais qui sont tous isomorphes entre eux. Cela n'est pas absolument exact si l'on considère le domaine

entier d'existence de ces groupes; il se peut qu'à une transformation de l'un correspondent plusieurs transformations et même une infinité de transformations de l'autre. C'est ainsi qu'à une transformation homographique réelle à une variable correspondent deux substitutions linéaires unimodulaires à deux variables. On peut toujours en tout cas imaginer un groupe abstrait  $G'$  tel qu'à toute transformation de  $G'$  corresponde une transformation et une seule de l'un quelconque des groupes  $G$ , à une transformation de ce groupe  $G$  pouvant correspondre plusieurs transformations de  $G'$ . Ce groupe  $G'$  a un domaine simplement connexe, c'est-à-dire que tout contour fermé y est réductible à zéro par déformation continue. Tout groupe  $G$  qui a un isomorphisme non absolument holoédrique avec  $G'$  n'est pas simplement connexe, et le nombre des contours fermés irréductibles entre eux par déformation continue dans le domaine de  $G$  est égal au nombre des transformations de  $G'$  qui correspondent à la transformation identique de  $G$ ; ce nombre peut être fini ou infini; les transformations en question de  $G'$  engendrent un groupe discontinu qu'on peut appeler le groupe de connexion de  $G$ .

H. Weyl a démontré<sup>1</sup> que tout groupe simple réel unitaire a un groupe de connexion fini, et on peut ajouter qu'il existe toujours un groupe linéaire simplement connexe de la structure réelle unitaire considérée. En fait on connaît les groupes de connexion des groupes simples réels unitaires. Mais la méthode par laquelle Weyl a obtenu ce résultat fondamental ne s'applique pas aux formes réelles non unitaires des groupes simples, par exemple au groupe homographique réel, au groupe linéaire réel d'une forme quadratique indéfinie, etc. Les espaces  $\mathcal{E}$  à courbure négative attachés aux groupes réels non unitaires nous fournissent au contraire une méthode immédiate pour résoudre le problème. En effet soit  $G$  le groupe des déplacements de  $\mathcal{E}$ . Chaque transformation de  $G$  se décompose d'une manière et d'une seule en une rotation autour d'un point fixe  $O$  et une transvection amenant  $O$  en un certain point  $A$ , transvection complètement déterminée par le point  $A$ . Il en résulte que tout

<sup>1</sup> *Math. Zeitschr.*, 24, 1925, p. 380.

contour fermé dans le domaine du groupe  $G$  se ramène à deux contours fermés: l'un dans le domaine du groupe des rotations, ou groupe d'isotropie, l'autre dans le domaine des transvections, c'est-à-dire en définitive dans l'espace  $\mathcal{E}$ . L'espace  $\mathcal{E}$  étant simplement connexe, le second contour fermé est réductible à zéro. Il en résulte que deux contours fermés du domaine du groupe total  $G$  seront réductibles ou non l'un à l'autre si les contours fermés correspondants du domaine du groupe d'isotropie le sont. Autrement dit le groupe de connexion de  $G$  est identique à celui du groupe d'isotropie. Et comme ce dernier est un groupe linéaire unitaire, ou se décompose en groupes unitaires, et, dans certains cas, un groupe à un paramètre isomorphe au groupe des rotations du plan, on connaît facilement son groupe de connexion, de sorte que le problème proposé est résolu. La conclusion générale est la suivante. Le groupe de connexion de tout groupe simple réel non unitaire, ou bien est formé d'un nombre fini d'opérations, ou bien se décompose en un groupe fini et un groupe cyclique d'ordre infini.

Je signalerai seulement un résultat curieux. Le groupe de connexion du groupe homographique réel d'une variable est infini, tandis qu'il est fini pour le groupe homographique de plusieurs variables.

Dans tous les cas du reste on peut effectivement construire, pour une forme réelle non unitaire donnée d'une structure simple, un groupe simplement connexe  $G'$ ; seulement ce groupe n'est pas nécessairement linéaire, comme dans le cas des formes unitaires. Dans le cas du groupe homographique réel d'une variable, le groupe simplement connexe  $G'$  est par exemple donné par la formule

$$\operatorname{tg} x' = \frac{a \operatorname{tg} x + b}{a' \operatorname{tg} x + b'}$$

A la transformation homographique identique ( $a = b' = 1$ ,  $a' = b = 0$ ) correspondent les transformations en nombre infini

$$x' = x + n\pi \quad (n \text{ entier}) .$$

La méthode précédente s'applique aussi au groupe simple *complexe*, qui a du reste le même groupe de connexion que le groupe réel unitaire.



## XIII

Les espaces  $\mathcal{E}$  dont je viens de parler sont des espaces de Klein, admettant pour groupe fondamental le groupe de leurs déplacements. L'existence de ces espaces montre que toute Géométrie de Klein à groupe fondamental simple devient riemannienne par un choix convenable de l'élément générateur de l'espace; le choix est essentiellement unique<sup>1</sup> si le groupe fondamental est *complexe*, ou *réel non unitaire*; il est multiple si le groupe fondamental est *réel unitaire*<sup>2</sup>. Ce résultat s'étend évidemment à un groupe semi-simple. Si on veut bien remarquer que les Géométries de Klein les plus importantes sont celles dont les groupes fondamentaux sont simples ou semi-simples (Géométries projective, affine, conforme, de Laguerre, d'Hermite, etc.), on arrive à cette conclusion inattendue que la Géométrie riemannienne (à  $ds^2$  défini) occupe une place tout à fait privilégiée. Partis, au début de cette conférence, de l'antagonisme entre les Géométries de Klein et la Géométrie riemannienne générale, nous arrivons, après un long détour, à cette constatation que c'est sous la forme riemannienne que ces Géométries de Klein, ou du moins les plus importantes d'entre elles, montrent le mieux leurs propriétés fondamentales. Il y aurait beaucoup à dire sur ce côté géométrique de la question<sup>3</sup>. Je me contenterai d'en signaler un aspect intéressant.

On sait l'importance du principe de dualité en Géométrie projective; or ce principe n'apparaît pas du tout si l'on se borne

---

<sup>1</sup> Cela signifie que si l'on a deux systèmes d'éléments générateurs rendant la Géométrie riemannienne, on peut établir entre les éléments des deux systèmes une correspondance biunivoque telle que deux éléments correspondants soient invariants par le même sous-groupe du groupe fondamental; au fond, c'est ce sous-groupe qui, suivant les idées de Klein et de Poincaré, définit le « point » de l'espace.

<sup>2</sup> Dans ce dernier cas, il peut en outre se présenter des formes riemanniennes *avec torsion*, la courbure et la torsion étant encore conservées par le transport parallèle.

<sup>3</sup> En Arithmétique et dans la Théorie des fonctions, l'existence de ces formes riemanniennes joue un rôle important. C'est ainsi que H. Poincaré fait reposer la possibilité d'une théorie générale des groupes hyperfuchsien *discontinus* sur la forme riemannienne qu'on peut donner à la Géométrie d'une forme d'Hermite indéfinie (*C. R.*, 98, 1884, p. 503-503), de même que la théorie des groupes fuchsien et celle des groupes kleinéens reposent sur les Géométries non-euclidiennes à 2 et à 3 dimensions, formes riemanniennes des Géométries projectives de la droite réelle et de la droite complexe.



à la partie *continue* du groupe fondamental de cette Géométrie, à savoir le groupe des homographies: le groupe fondamental complet est formé des homographies et des corrélations. Dans toute Géométrie de Klein, à groupe fondamental continu donné, il sera du plus haut intérêt de savoir si ce groupe continu n'est pas à compléter par d'autres familles de transformations analogues aux corrélations de l'espace projectif. Or c'est là un problème que nos connaissances actuelles sur les groupes unitaires nous permettent de résoudre complètement toutes les fois que le groupe fondamental est simple ou semi-simple. Je signalerai simplement ce résultat assez curieux, c'est que, dans la Géométrie cayleyenne à 7 dimensions dont l'absolu est une quadrique de la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 - x_8^2 = 0 ,$$

le groupe des déplacements proprement dits se complète par 23 autres familles de transformations.

J'espère vous avoir montré toute la variété des problèmes que la Théorie des groupes et la Géométrie, en s'appuyant mutuellement l'une sur l'autre, permettent d'aborder et de résoudre. Il y a encore là un champ de recherches à peine exploré et qui promet des résultats très intéressants.