## I

L'idée fondamentale de Klein peut être rattachée, comme on sait, aux notions les plus anciennes de la science. La Géométrie élémentaire est l'étude des propriétés des figures qui sont indépendantes de leur position particulière dans l'espace. Il a fallu un grand nombre de siècles pour traduire cette phrase un peu vague en un langage précis : les propriétés qu'étudie la Géométrie élémentaire sont celles qui sont invariantes par un certain ensemble de transformations formant un groupe, à savoir les déplacements. L'axiome d'après lequel deux figures égales à une troisième sont égales entre elles exprime précisément, sous une forme en quelque sorte métaphysique, la propriété des déplacements de former un groupe. La Géométrie projective, qui constituait d'abord un simple chapitre de la Géométrie ordinaire et qui était arrivée, par son évolution même, à se constituer en doctrine autonome, est aussi pour Klein l'étude des propriétés des figures invariantes par un certain ensemble de transformations (les transformations homographiques) formant un groupe.

D'une manière générale tout groupe de transformations continu G définit une Géométrie autonome. Si l'on regarde les variables transformées par le groupe comme constituant un point d'un espace à un nombre suffisant de dimensions, cette Géométrie étudie les propriétés des figures invariantes par les transformations du groupe G, qui jouent ainsi le rôle des déplacements en Géométrie euclidienne, des homographies en Géométrie projective. Le groupe G est dit le groupe fondamental de la Géométrie. On est arrivé ainsi à constituer la Géométrie affine, la Géométrie conforme ou anallagmatique, la Géométrie de Laguerre, la Géométrie hermitienne, etc.

On a été conduit, pour la commodité du langage, à accoler au mot espace une épithète rappelant le groupe fondamental de la Géométrie étudiée ; c'est ainsi qu'on parle de l'espace euclidien, de l'espace projectif, etc. Tous les espaces de Klein, comme on les appelle, sont *homogènes*, en ce sens que leurs propriétés sont invariantes par les transformations du groupe fondamental correspondant: c'est du reste ce groupe qui donne en quelque sorte la mesure de son homogénéité. L'espace parfaitement homogène est celui dont le groupe fondamental est le groupe infini de toutes les transformations continues: c'est l'espace de l'Analysis situs; les propriétés géométriques des figures y sont du reste relativement peu variées; elles deviennent déjà plus considérables si on prend pour groupe fondamental le groupe infini de toutes les transformations continues et dérivables. Dans un espace qui n'aurait aucune espèce d'homogénéité, c'est-à-dire dont le groupe fondamental se réduirait à la transformation identique, il n'y aurait en revanche, au sens du programme d'Erlangen, aucune science du général; toute la Géométrie se réduirait à des faits particuliers, sans lien les uns avec les autres.

## II

En marge de la riche moisson de travaux géométriques suscitée par les idées de Klein, s'est développée entre 1867 et 1914 une théorie géométrique toute différente, issue de la célèbre Dissertation inaugurale de Riemann: « Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie » [1]. Les points de départ des deux grands géomètres sont bien différents. Pour Klein la notion géométrique fondamentale est contenue dans l'axiome de l'égalité, interprété à la lumière de la notion de groupe. Pour Riemann, à une époque du reste où la théorie des groupes continus n'était pas fondée, la notion géométrique fondamentale est celle de longueur; mais, obéissant à la tendance générale de la Physique moderne et répugnant à l'idée de soumettre cette notion à des lois *a priori* faisant intervenir, dans chaque région de l'espace, l'espace tout entier, il suppose la longueur définie de proche en proche au moyen d'une forme différentielle, que, pour plus de simplicité, on peut supposer quadratique, mais *a priori* arbitraire. L'espace ordinaire se retrouve comme un cas tout à fait particulier des espaces plus généraux introduits par Riemann.

[1] La thèse inaugurale de Riemann fut soutenue sous ce titre le 10 juin 1854 devant la Faculté de Philosophie de Göttingen; elle est reproduite dans les *Gesamm. math. Werke* de Riemann (Leipzig, 1872, p. 254-269).