

# IV

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Qu'une telle vue fût incomplète, l'impossibilité de fonder la Géométrie projective ou la Géométrie conforme classiques sur un tel principe le prouve avec évidence; en Géométrie projective la notion de parallélisme n'existe pas; en Géométrie conforme, la notion de vecteur disparaissant elle-même, disparaît *ipso facto* le problème du transport des vecteurs par parallélisme.

#### IV

Mais si le transport parallèle ne fournit pas par lui-même un principe assez général pour englober les différentes théories géométriques connues, il fournit du moins, envisagé d'une manière convenable, un moyen pour y parvenir.

Reprenons dans un espace de Riemann une petite région entourant un point donné A; la connaissance du  $ds^2$  de l'espace fait jusqu'à un certain point de cette région un petit morceau d'espace euclidien; on peut imaginer par exemple un repère rectangulaire d'origine A, et rapporter à ce repère tous les points M infiniment voisins de A en leur attribuant ainsi des coordonnées cartésiennes rectangulaires; les formules qui expriment la distance d'un point M à l'origine, l'angle de deux vecteurs joignant le point A à deux points M, M' infiniment voisins de A, celles qui traduisent un changement de coordonnées rectangulaires, sont exactement les mêmes que dans l'espace ordinaire. La difficulté commence quand on considère deux portions voisines de l'espace, l'une entourant un point A, l'autre un point voisin A'; elles constituent deux morceaux d'espace euclidien qui sont en quelque sorte isolés l'un de l'autre, tant qu'on n'a pas réussi à les orienter l'un par rapport à l'autre. D'une manière plus précise si nous attachons aux points A et A' deux repères rectangulaires, nous savons localiser, à la manière euclidienne, l'origine A' du second repère par rapport au premier, mais nous ne savons pas orienter les axes du second repère par rapport à ceux du premier. Le transport par parallélisme de Levi-Civita nous fournit précisément un moyen de fixer cette orientation, puisque nous savons, grâce à lui, reconnaître quand deux vecteurs d'origine A et A' doivent être regardés comme paral-

lèles. Le parallélisme de Levi-Civita ne nous fournit donc pas seulement une relation entre les vecteurs attachés à deux points infiniment voisins de l'espace, mais, et cela a une portée beaucoup plus grande, il nous permet d'intégrer dans un seul et même espace euclidien deux petits morceaux contigus de l'espace de Riemann.

Du point de vue précédent, l'espace de Riemann est donc regardé comme une collection de petits morceaux d'espaces euclidiens raccordés de proche en proche les uns avec les autres. Ce qui est essentiel à remarquer, c'est que le raccord se fait nécessairement *en série linéaire*. Etant donnés deux points A et B de l'espace reliés entre eux par un arc de courbe continu (C), on peut regarder la ligne (C) et toute la région de l'espace qui l'avoiisine immédiatement comme faisant partie d'un seul et même espace euclidien; ou, si l'on veut, pour employer une expression suggestive, on peut développer cette région de l'espace sur un espace euclidien fictif, l'espace euclidien tangent en A à l'espace riemannien. Le fait que l'espace donné n'est pas euclidien se traduit par le fait que le développement d'un autre arc de courbe (C') joignant A à B ne donnera pas, pour le point B et la petite région environnante, la même position qu'auparavant dans l'espace euclidien tangent en A.

La possibilité de raccorder dans un même espace euclidien deux morceaux contigus de l'espace de Riemann peut s'exprimer en disant que c'est un espace à connexion euclidienne. Le fait que le raccord de deux morceaux non contigus entourant deux points A et B se fait de proche en proche et dépend du chemin suivi pour aller de A en B peut s'exprimer en disant que l'espace de Riemann est un espace euclidien *non holonome*.

Revenons maintenant au point de vue de Klein. L'espace euclidien ordinaire est un espace de Klein dont le groupe fondamental G est le groupe des déplacements. C'est ce groupe qui contient l'essence de la géométrie ordinaire. Les équations fondamentales qui régissent le déplacement à plusieurs paramètres d'un trièdre mobile ne sont autres que les équations de structure du groupe G, au sens que j'ai donné à ce mot dans ma théorie de la structure des groupes continus, et la théorie des courbes, des surfaces, des congruences et des complexes de

droites, etc., n'est au fond qu'une simple conséquence analytique de ces équations fondamentales. Dans un espace de Riemann à chaque point duquel on a attaché un repère rectangulaire, le passage d'un repère à un repère infiniment voisin se fait aussi par une transformation du groupe  $G$ , transformation qu'on peut décomposer en une translation et une rotation; la translation est donnée immédiatement par le  $ds^2$  de l'espace, la rotation est donnée par le transport parallèle de Levi-Civita. On peut donc dire que l'espace de Riemann admet le même groupe fondamental  $G$  que l'espace euclidien, mais la transformation de  $G$  qui fait passer d'un repère à un autre n'est définie que de proche en proche et n'a de sens que si on se donne le chemin joignant les origines des deux repères. L'espace de Riemann est un espace non holonome à groupe fondamental  $G$ .

## V

Il n'y a maintenant aucune difficulté à imaginer des espaces non holonomes à groupe fondamental quelconque<sup>1</sup>. Un espace projectif non holonome, par exemple, s'obtiendra en attachant *in abstracto* à chaque point d'une variété numérique un espace projectif (espace tangent) et en se donnant une loi permettant d'intégrer dans un seul et même espace projectif les deux espaces projectifs attachés à deux points infiniment voisins. Si par exemple on attache à chacun d'eux un repère projectif (tétraèdre de référence), la loi de raccord se traduira analytiquement par une transformation (infiniment petite) du groupe projectif, qui joue ainsi le rôle du groupe fondamental. Il est clair que la notion ainsi obtenue d'espace à connexion projective dépasse la notion de transport parallèle, bien qu'on puisse utiliser, comme l'a fait M. Schouten, la propriété du groupe projectif d'être mis sous forme linéaire pour appliquer la théorie analytique générale des transports parallèles à l'exposition de la théorie des espaces à connexion projective.

Les espaces de Weyl rentrent dans la théorie générale précé-

<sup>1</sup> Cf. E. CARTAN, *Les espaces à connexion conforme* (Ann. Soc. polon. de math., 1923, p. 171-221): *Sur les variétés à connexion projective* (Bull. Soc. Math., 52, 1924, p. 205-241).