Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1927)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA THÉORIE DES GROUPES ET LA GÉOMÉTRIE
Kapitel: V
Autor: Cartan, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21253

droites, etc., n'est au fond qu'une simple conséquence analytique de ces équations fondamentales. Dans un espace de Riemann à chaque point duquel on a attaché un repère rectangulaire, le passage d'un repère à un repère infiniment voisin se fait aussi par une transformation du groupe G, transformation qu'on peut décomposer en une translation et une rotation; la translation est donnée immédiatement par le ds^2 de l'espace, la rotation est donnée par le transport parallèle de Levi-Civita. On peut donc dire que l'espace de Riemann admet le même groupe fondamental G que l'espace euclidien, mais la transformation de G qui fait passer d'un repère à un autre n'est définie que de proche en proche et n'a de sens que si on se donne le chemin joignant les origines des deux repères. L'espace de Riemann est un espace non holonome à groupe fondamental G.

V

Il n'y a maintenant aucune difficulté à imaginer des espaces non holonomes à groupe fondamental quelconque [1]. Un espace projectif non holonome, par exemple, s'obtiendra en attachant *in abstracto* à chaque point d'une variété numérique un espace projectif (espace tangent) et en se donnant une loi permettant d'intégrer dans un seul et même espace projectif les deux espaces projectifs attachés à deux points infiniment voisins. Si par exemple on attache à chacun d'eux un repère projectif (tétraèdre de référence), la loi de raccord se traduira analytiquement par une transformation (infiniment petite) du groupe projectif, qui joue ainsi le rôle du groupe fondamental. Il est clair que la notion ainsi obtenue d'espace à connexion projective dépasse la notion de transport parallèle, bien qu'on puisse utiliser, comme l'a fait M. Schouten, la propriété du groupe projectif d'être mis sous forme linéaire pour appliquer la théorie analytique générale des transports parallèles à l'exposition de la théorie des espaces à connexion projective.

Les espaces de Weyl rentrent dans la théorie générale précé-

---

[1] Cf. E. CARTAN, *Les espaces à connexion conforme* (*Ann. Soc. polon. de math.*, 1923, p. 171-221): *Sur les variétés à connexion projective* (*Bull. Soc. Math.*, 52, 1924, p. 205-241).

dente; il suffit de prendre comme groupe fondamental, non pas le groupe des déplacements, mais le groupe des déplacements et des similitudes de l'espace ordinaire.

Une propriété commune à tous les espaces non holonomes à groupe fondamental est la suivante. Si l'on considère un arc de courbe AB, la région de l'espace environnant immédiatement cet arc de courbe peut être regardée comme faisant partie d'un seul et même espace de Klein. Par suite, la théorie des courbes est identiquement la même dans un espace non holonome que dans un espace holonome au même groupe fondamental. Les classes remarquables de courbes dans l'espace holonome ont leurs analogues dans l'espace non holonome. C'est ainsi que les droites, qui existent en Géométrie euclidienne, en Géométrie affine, en Géométrie projective, ont leurs analogues dans les espaces à connexion euclidienne, affine, projective: ce sont les géodésiques de ces espaces, qu'on peut définir comme les lignes se développant suivant des droites. Dans un espace de Riemann à trois dimensions, les notions de courbure et de torsion d'une ligne s'étendent elles-mêmes; dans un espace de Weyl celles qui les remplacent sont les deux invariants fondamentaux d'une courbe euclidienne par rapport au groupe des similitudes. A un autre point de vue, on pourrait imaginer des espaces à groupe fondamental à une dimension; ces espaces sont nécessairement holonomes.

La non holonomie d'un espace ne se révèle que si on le développe suivant deux arcs de courbe distincts joignant les deux mêmes points, ou encore, ce qui revient au même, si on le développe suivant un contour fermé ou cycle. A un tel cycle, issu d'un point A par exemple et y revenant, est associée, dans l'espace holonome tangent en A, une transformation du groupe fondamental qui révèle la non holonomie de l'espace le long du cycle. Si ce cycle est infinitésimal, la transformation associée est aussi infinitésimale et définit la courbure riemannienne de l'espace le long du cycle. Un cas particulier important est celui où cette transformation infinitésimale laisse fixe le point A; j'ai proposé de dire que l'espace non holonome est alors *sans torsion*. C'est ce qui se passe pour les espaces de Riemann, dont la connexion euclidienne est définie au moyen du parallélisme de Levi-Civita;

c'est également ce qui se passe pour les espaces de Weyl. Dans le cas des espaces à connexion affine, qui comprennent en particulier les espaces précédents, la transformation associée à un cycle infinitésimal peut se décomposer en une translation (appliquée au point A) et une rotation affine. La translation définit la torsion de l'espace, la rotation sa courbure. Un espace à connexion affine sans courbure est un espace dans lequel le parallélisme de deux vecteurs a une signification *absolue*, indépendante du chemin par lequel on relie leurs deux origines. Nous verrons tout à l'heure que ces espaces sans courbure ont des applications importantes.

VI

Nous avons implicitement parlé jusqu'à présent des espaces non holonomes *ponctuels*. On s'est habitué depuis longtemps, en Géométrie projective, par exemple, à attribuer à l'espace d'autres éléments générateurs que le point, par exemple le plan, ou la droite. La nature de l'élément générateur ne joue du reste qu'un rôle accessoire et n'atteint pas l'essence de la Géométrie; le groupe fondamental change de forme analytique avec le changement de l'élément générateur de l'espace, mais sa structure reste la même et c'est en elle que résident les propriétés intimes de la Géométrie correspondante.

Dans le cas des espaces non holonomes, le choix de l'élément générateur joue au contraire un rôle essentiel. Un espace de Riemann est un espace euclidien *ponctuel* non holonome. On peut imaginer un espace euclidien *tangentiel* (c'est-à-dire engendré par des plans) non holonome; sa géométrie diffère profondément de la géométrie riemannienne. Un espace à courbure constante de Cayley-Klein, dans lequel le point est pris comme élément générateur, est un espace euclidien non holonome; mais si on prend au contraire le plan comme élément générateur, il n'en est plus de même, car la figure formée des plans infiniment voisins d'un plan donné ne jouit pas du tout des mêmes propriétés infinitésimales que la figure analogue dans l'espace euclidien. Dans un espace de Cayley à courbure positive, deux plans infiniment voisins ont un invariant qui est une forme différen-