**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 26 (1927)
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA THÉORIE DES GROUPES ET LA GÉOMÉTRIE
**Autor:** Cartan, E.
**Kapitel:** VI
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-21253

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 16.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

c'est également ce qui se passe pour les espaces de Weyl. Dans le cas des espaces à connexion affine, qui comprennent en particulier les espaces précédents, la transformation associée à un cycle infinitésimal peut se décomposer en une translation (appliquée au point A) et une rotation affine. La translation définit la torsion de l'espace, la rotation sa courbure. Un espace à connexion affine sans courbure est un espace dans lequel le parallélisme de deux vecteurs a une signification *absolue*, indépendante du chemin par lequel on relie leurs deux origines. Nous verrons tout à l'heure que ces espaces sans courbure ont des applications importantes.

## VI

Nous avons implicitement parlé jusqu'à présent des espaces non holonomes *ponctuels*. On s'est habitué depuis longtemps, en Géométrie projective, par exemple, à attribuer à l'espace d'autres éléments générateurs que le point, par exemple le plan, ou la droite. La nature de l'élément générateur ne joue du reste qu'un rôle accessoire et n'atteint pas l'essence de la Géométrie; le groupe fondamental change de forme analytique avec le changement de l'élément générateur de l'espace, mais sa structure reste la même et c'est en elle que résident les propriétés intimes de la Géométrie correspondante.

Dans le cas des espaces non holonomes, le choix de l'élément générateur joue au contraire un rôle essentiel. Un espace de Riemann est un espace euclidien *ponctuel* non holonome. On peut imaginer un espace euclidien *tangentiel* (c'est-à-dire engendré par des plans) non holonome; sa géométrie diffère profondément de la géométrie riemannienne. Un espace à courbure constante de Cayley-Klein, dans lequel le point est pris comme élément générateur, est un espace euclidien non holonome; mais si on prend au contraire le plan comme élément générateur, il n'en est plus de même, car la figure formée des plans infiniment voisins d'un plan donné ne jouit pas du tout des mêmes propriétés infinitésimales que la figure analogue dans l'espace euclidien. Dans un espace de Cayley à courbure positive, deux plans infiniment voisins ont un invariant qui est une forme différen-

tielle quadratique ternaire définie positive (c'est par exemple le carré de la distance de leurs pôles par rapport à l'absolu); dans l'espace euclidien, l'invariant de deux plans est l'angle infiniment petit de leurs normales, qui ne fait intervenir que deux différentielles indépendantes au lieu de trois; en un certain sens l'espace euclidien, en tant qu'engendré par les plans, est *moins rigide* que l'espace à courbure constante.

On conçoit d'après cela la très grande variété des géométries non holonomes possibles; un très petit nombre d'entre elles ont été envisagées jusqu'à présent.

Ce qui précède s'éclaircira peut-être par un exemple particulier. Partons du groupe projectif du plan. Nous aurons une première classes d'espaces non holonomes à deux dimensions en prenant le point pour élément générateur; les espaces obtenus admettent des géodésiques, qui, lorsqu'on rapporte l'espace à un système quelconque de coordonnées ponctuelles $x$ et $y$, sont les courbes intégrales d'une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{A}(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \mathrm{B}(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \mathrm{C}(x, y)\frac{dy}{dx} + \mathrm{D}(x, y) = 0 .$$

Inversement, étant donnée une équation différentielle de cette forme, on peut trouver une infinité de connexions projectives faisant des courbes intégrales de cette équation les géodésiques de l'espace correspondant; parmi toutes ces connexions il en est du reste une privilégiée, pour laquelle le déplacement projectif associé à un cycle infinitésimal d'origine A laisse invariant le point A, ainsi que toutes les droites issues de A.

Prenons maintenant, avec le même groupe fondamental, non pas le point, mais l'élément de contact de Lie (ensemble d'un point et d'une droite passant par ce point) comme élément générateur. Nous arriverons alors à des espaces d'éléments (à trois dimensions) à connexion projective. Cette fois nous pourrons nous arranger pour que les géodésiques (correspondant aux droites du plan projectif envisagées comme lieux d'éléments de contact) soient les courbes intégrales d'une équation différentielle du second ordre absolument quelconque, de sorte que nous pourrons géométriser la théorie des invariants d'une équation différen-

tielle du second ordre vis-à-vis du groupe des transformations ponctuelles les plus générales.

Dans l'exemple précédent l'espace était un lieu d'éléments de contact; le groupe fondamental était le groupe de transformations de contact résultant du prolongement, au sens de Lie, du groupe projectif ponctuel. Il n'y a naturellement aucune difficulté à partir d'un groupe de transformations de contact irréductible quelconque, par exemple le groupe des transformations de contact qui changent les sphères orientées en sphères orientées; on bâtirait avec lui des espaces non holonomes, en prenant comme élément générateur l'élément de contact par exemple, ou encore la sphère orientée, etc.

## VII

Les espaces non holonomes ont été envisagées jusqu'ici *in abstracto*; la connexion qui sert à les définir est une loi interne. C'est H. Weyl qui le premier a défini le transport par parallélisme par une propriété interne de l'espace. Levi-Civita se plaçait au contraire à un point de vue tout différent qui, bien qu'inférieur philosophiquement à celui de Weyl, a une très grande importance en Géométrie; il se rattache à la théorie générale des connexions induites dont je dirai seulement quelques mots.

Avant d'indiquer la manière de procéder de Levi-Civita, nous pouvons la faire pressentir sur un exemple extrêmement élémentaire. Considérons une courbe tracée dans un plan ordinaire (euclidien); la présence de la courbe dans le plan permet de définir sur cette courbe une abscisse curviligne. Oublions maintenant que la courbe est dans le plan et considérons-la en elle-même; rien ne la distingue d'une droite euclidienne; la formule de Chasles qui lie les abscisses de trois points d'une droite lie également les abscisses curvilignes de trois points de la courbe. La présence de la courbe dans le plan euclidien nous a donc donné le moyen de faire de cette courbe un espace euclidien à 1 dimension. Nous pouvons du reste nous représenter physiquement le mécanisme de l'opération en déroulant ou développant la courbe sur une de ses tangentes; nous pouvons aussi définir chaque stade