même espace sans torsion sans être isomorphes ; l'identité des espaces sans torsion de deux groupes définit par suite une sorte d'isomorphisme plus général que l'isomorphisme classique et qu'on pourrait appeler l'isomorphisme affine. On peut aussi définir un isomorphisme projectif en dotant l'espace du groupe d'une connexion projective liée au groupe d'une manière invariante.

Parmi les groupes continus, une classe est particulièrement importante, c'est celle des groupes simples ou semi-simples. Les espaces sans torsion de ces groupes sont riemanniens, avec un ds^2 qui n'est pas nécessairement défini. Ils font partie d'une catégorie plus générale d'espaces riemanniens, caractérisés par la propriété que le transport par parallélisme y conserve la courbure riemannienne. Chose curieuse, cette propriété est équivalente à la suivante, qui paraît de nature beaucoup moins restrictive: la symétrie par rapport à un point quelconque de l'espace est une transformation *isométrique*, c'est-à-dire laisse invariant le ds^2 de l'espace.

La détermination de tous les espaces de Riemann à ds^2 défini positif dont la courbure riemannienne est conservée par le transport parallèle peut être faite complètement [1]; les plus généraux peuvent se déduire très simplement de certains d'entre eux, de dimensions moindres, et qui sont, en ce sens, *irréductibles*. Ce sont ces espaces de Riemann irréductibles qui nous ouvrent les vues les plus inattendues sur certains problèmes importants de la théorie des groupes simples, d'une part, sur des théories classiques de la Géométrie d'autre part. Je les désignerai pour abréger sous le nom d'espaces $\mathcal{E}$.

X

Pour bien comprendre le rôle joué par les espaces $\mathcal{E}$, quelques remarques préliminaires sur les groupes simples ne seront pas inutiles. A chaque structure simple d'ordre r correspond d'abord

---

[1] Elle fait l'objet d'un mémoire récent *(Bull.Soc. Math.*, 54,1926, p. 214-264, et 55, 1927, p. 114-134). V. aussi E. Cartan, *Sur les espaces de Riemann dans lesquels le transport par parallélisme conserve la courbure (Rend. Acc. Lincei*, 6[me] série, 3I, 1926, p. 544-547).

un groupe à r paramètres *complexes* $a_1, \ldots, a_r$ (en réalité une infinité, mais tous isomorphes entre eux). Mais il peut aussi lui correspondre des groupes obtenus en prenant pour $a_1, \ldots, a_r$ des fonctions analytiques convenablement choisies de r paramètres réels $a_1, \ldots, a_r$; nous dirons pour abréger que le groupe est *complexe* dans le premier cas, *réel* dans le second cas. Par exemple les groupes de toutes les transformations homographiques complexes ou réelles de n variables sont respectivement complexe et réel, mais correspondent à la même structure.

A une structure simple donnée correspondent plusieurs formes réelles distinctes, irréductibles l'une à l'autre; en particulier au groupe homographique complexe de n variables correspondent le groupe homographique réel de n variables, et aussi les groupes linéaires unimodulaires d'une forme d'Hermite à $n+1$ variables, définie ou indéfinie. Bien que les variables soient complexes, ces derniers groupes sont dits *réels* parce qu'on porte son attention sur les $(n+1)^2-1$ quantités réelles dont dépendent les paramètres de leurs substitutions.

J'ai déterminé en 1914 [1] toutes les formes réelles distinctes correspondant à une même structure simple. Parmi toutes ces formes il y en a une dont H. Weyl a montré l'extrême importance [2], c'est la forme dite *unitaire*; le domaine d'un groupe réel unitaire est *fermé* tandis que ceux des autres groupes réels sont *ouverts*. Il y a donc lieu en résumé de distinguer pour une structure simple donnée, une forme *complexe*, une forme réelle *unitaire* et plusieurs formes réelles *non unitaires*.

Revenons maintenant aux espaces $\mathcal{E}$. Un premier résultat remarquable, c'est que leur détermination revient à celle des différentes formes réelles correspondant aux différentes structures simples possibles. D'une manière plus précise à la forme complexe et à chacune des formes réelles non unitaires d'une structure simple donnée correspondent deux classes d'espaces $\mathcal{E}$; ceux de la première classe ont leur courbure riemannienne partout positive ou nulle; ceux de la seconde classe ont leur

[1] E. Cartan, *Les groupes réels simples, finis et continus* (*Ann. Ec. Norm.*, 3me série, 31, 1914, p. 263-355).

[2] H. Weyl, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen* (*Math. Zeitschr.*, 23, 1925, p. 271-309; 24, 1925, p. 328-395).

courbure riemannienne partout négative ou nulle; dans chaque classe on n'a du reste essentiellement qu'un seul espace, car on passe de l'un à l'autre en changeant simplement l'unité de longueur.

C'est surtout des espaces $\mathcal{E}$ à courbure négative que je vous parlerai. Tous ces espaces ont une métrique partout régulière; ils sont simplement connexes et jouissent de la propriété que par deux points quelconques il passe une géodésique et une seule. Chacun d'eux admet un groupe des déplacements qui est tout simplement le groupe complexe ou réel non unitaire auquel il correspond: dans le premier cas son groupe des déplacements est à $2r$ paramètres réels, dans le second cas il n'est qu'à r paramètres réels. Le groupe des déplacements des espaces $\mathcal{E}$ à courbure positive est au contraire toujours le groupe réel unitaire correspondant. Pour les uns et les autres le groupe des rotations isométriques autour d'un point (groupe d'isotropie) est simple unitaire ou se décompose en groupes simples unitaires.

XI

Je signalerai seulement deux problèmes de la théorie des groupes que la considération des espaces $\mathcal{E}$ permet d'aborder avec succès.

On sait que, pour S. Lie, tout groupe continu est engendré par des transformations infinitésimales; en fait toute transformation finie suffisamment voisine de la transformation identique peut être obtenue en répétant une infinité de fois une même transformation infiniment petite, de même qu'une rotation d'un angle fini α autour d'un axe peut être obtenu en répétant une infinité de fois une rotation d'un angle infiniment petit autour de cet axe. Mais il y a des cas où toute une partie des transformations finies du groupe échappe à cette génération. Par exemple la substitution unimodulaire réelle à trois variables

$$x' = ax\ ,\qquad y' = by\ ,\qquad z' = cz\ ,\qquad (abc = 1)$$

où a est positif, b et c sont négatifs, ne peut pas être engendrée par une substitution linéaire réelle infinitésimale.