XIII

XIII

Les espaces $\mathcal{E}$ dont je viens de parler sont des espaces de Klein, admettant pour groupe fondamental le groupe de leurs déplacements. L'existence de ces espaces montre que toute Géométrie de Klein à groupe fondamental simple devient riemannienne par un choix convenable de l'élément générateur de l'espace; le choix est essentiellement unique [1] si le groupe fondamental est *complexe*, ou *réel non unitaire;* il est multiple si le groupe fondamental est *réel unitaire* [2]. Ce résultat s'étend évidemment à un groupe semi-simple. Si on veut bien remarquer que les Géométries de Klein les plus importantes sont celles dont les groupes fondamentaux sont simples ou semi-simples (Géométries projective, affine, conforme, de Laguerre, d'Hermite, etc.), on arrive à cette conclusion inattendue que la Géométrie riemannienne (à ds^2 défini) occupe une place tout à fait privilégiée. Partis, au début de cette conférence, de l'antagonisme entre les Géométries de Klein et la Géométrie riemannienne générale, nous arrivons, après un long détour, à cette constatation que c'est sous la forme riemannienne que ces Géométries de Klein, ou du moins les plus importantes d'entre elles, montrent le mieux leurs propriétés fondamentales. Il y aurait beaucoup à dire sur ce côté géométrique de la question [3]. Je me contenterai d'en signaler un aspect intéressant.

On sait l'importance du principe de dualité en Géométrie projective; or ce principe n'apparaît pas du tout si l'on se borne

---

[1] Cela signifie que si l'on a deux systèmes d'éléments générateurs rendant la Géométrie riemannienne, on peut établir entre les éléments des deux systèmes une correspondance biunivoque telle que deux éléments correspondants soient invariants par le même sous-groupe du groupe fondamental; au fond, c'est ce sous-groupe qui, suivant les idées de Klein et de Poincaré, définit le « point » de l'espace.

[2] Dans ce dernier cas, il peut en outre se présenter des formes riemanniennes *avec torsion,* la courbure et la torsion étant encore conservées par le transport parallèle.

[3] En Arithmétique et dans la Théorie des fonctions, l'existence de ces formes riemanniennes joue un rôle important. C'est ainsi que H. Poincaré fait reposer la possibilité d'une théorie générale des groupes hyperfuchsiens *discontinus* sur la forme riemannienne qu'on peut donner à la Géométrie d'une forme d'Hermite indéfinie (*C. R.*, 98, 1884, p. 503-503), de même que la théorie des groupes fuchsiens et celle des groupes kleinéens reposent sur les Géométries non-euclidiennes à 2 et à 3 dimensions, formes riemanniennes des Géométries projectives de la droite réelle et de la droite complexe.

à la partie *continue* du groupe fondamental de cette Géométrie, à savoir le groupe des homographies: le groupe fondamental complet est formé des homographies et des corrélations. Dans toute Géométrie de Klein, à groupe fondamental continu donné, il sera du plus haut intérêt de savoir si ce groupe continu n'est pas à compléter par d'autres familles de transformations analogues aux corrélations de l'espace projectif. Or c'est là un problème que nos connaissances actuelles sur les groupes unitaires nous permettent de résoudre complètement toutes les fois que le groupe fondamental est simple ou semi-simple. Je signalerai simplement ce résultat assez curieux, c'est que, dans la Géométrie cayleyenne à 7 dimensions dont l'absolu est une quadrique de la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 - x_8^2 = 0 ,$$

le groupe des déplacements proprements dits se complète par 23 autres familles de transformations.

J'espère vous avoir montré toute la variété des problèmes que la Théorie des groupes et la Géométrie, en s'appuyant mutuellement l'une sur l'autre, permettent d'aborder et de résoudre. Il y a encore là un champ de recherches à peine exploré et qui promet des résultats très intéressants.