

# SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Autor(en): **Lainé, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21246>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PAR

E. LAINÉ (Angers)

---

1. — SOPHUS LIE a déduit de la théorie des transformations de contact une méthode bien connue d'intégration de l'équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre,

$$F(x, y, p_1) = a,$$

où nous écrivons  $p_1$  à la place de  $y'$ . Cette méthode consiste à déterminer une intégrale, distincte de  $F = c^{te}$ , du système différentiel

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{p_1} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial p_1} dp_1}{\left(\frac{dF}{dx}\right)},$$

où l'on a posé

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = \frac{\partial F}{\partial x} + p_1 \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Soit  $\Phi(x, y, p_1) = c^{te}$  une telle intégrale. L'élimination de  $p_1$  entre les équations

$$F = a, \quad \Phi = a_1,$$

donne l'intégrale générale de l'équation proposée.

Je me propose, dans le présent travail, de généraliser cette méthode pour l'intégration des équations d'ordre supérieur au premier <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Cf. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1923, 1<sup>er</sup> semestre, p. 1600.



2. — Nous appellerons *élément* du  $n^{\text{ième}}$  ordre, dans le plan  $xy$ , tout ensemble de valeurs des variables  $x, y, p_1, \dots, p_n$ .

Quand nous aurons à considérer des fonctions de ces variables, nous nous placerons toujours dans des domaines d'analyticité.

Si l'on établit, entre les variables  $x, y, p_i$ ,  $n + 1$  relations distinctes, on obtient  $\infty^1$  éléments d'ordre  $n$ ; on peut alors supposer que  $x, y, p_i$  sont fonctions d'une même variable,  $t$ , par exemple. On dira que ces éléments forment une *multiplicité*  $m_n$  quand on aura identiquement

$$dy - p_1 dx = 0, \quad dp_1 - p_2 dx = 0, \quad \dots, \quad dp_{n-1} - p_n dx = 0. \quad (1)$$

Les équations  $x = x(t), y = y(t)$  définissent alors en général une courbe, qui est le *support ponctuel* de la multiplicité. Il peut se faire que le support ponctuel se réduise à un point: les équations (1) montrent alors que  $x, y, p_1, \dots, p_{n-1}$  sont constants, et que  $p_n$  reste arbitraire.

Notons encore que la multiplicité  $m_n$  est complètement déterminée par la donnée de son support ponctuel.

De toute courbe  $y = f(x)$  du plan  $xy$ , on déduit une multiplicité  $m_n$  en posant

$$p_1 = f'(x), \quad p_2 = f''(x), \quad \dots, \quad p_n = f^{(n)}(x).$$

3. — Soit

$$\omega = \lambda_1(dy - p_1 dx) + \dots + \lambda_n(dp_{n-1} - p_n dx)$$

une forme de Pfaff où les  $\lambda$  sont des fonctions arbitraires, non toutes nulles, des variables  $x, y, p_i$ . Je dis que cette forme est au moins de classe 3. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait, en la multipliant au besoin par un facteur convenable, la supposer de classe 1; il existerait donc une fonction  $U(x, y, p_i)$  telle que

$$dU \equiv \lambda_1(dy - p_1 dx) + \dots + \lambda_n(dp_{n-1} - p_n dx).$$

On en déduirait d'abord

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \lambda_1, \quad \frac{\partial U}{\partial p_1} = \lambda_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial U}{\partial p_{n-1}} = \lambda_n, \quad \frac{\partial U}{\partial p_n} = 0,$$

puis

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2 - \dots - \lambda_n p_n$$

et par suite

$$\frac{\partial U}{\partial x} + p_1 \frac{\partial U}{\partial y} + \dots + p_n \frac{\partial U}{\partial p_{n-1}} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial p_n} = 0,$$

ce qui entraînerait nécessairement  $U = \text{cte}$ : les coefficients  $\lambda$  seraient donc tous nuls, contrairement à l'hypothèse.

Nous allons maintenant généraliser un peu la notation des crochets de JACOBI. Etant données deux fonctions des variables  $x, y, p_1, \dots, p_n$ , soient  $X$  et  $Y$ , nous poserons

$$[X, Y]_n = \frac{\partial X}{\partial p_n} \left( \frac{dY}{dx} \right) - \frac{\partial Y}{\partial p_n} \left( \frac{dX}{dx} \right),$$

le symbole  $\left( \frac{d}{dx} \right)$  désignant l'expression

$$\frac{\partial}{\partial x} + p_1 \frac{\partial}{\partial y} + \dots + p_n \frac{\partial}{\partial p_{n-1}}.$$

On vérifie immédiatement les relations

$$[X, X]_n = 0, \quad [X, Y]_n = -[Y, X]_n, \quad [F(X), \Phi(Y)]_n = \frac{dF}{dX} \frac{d\Phi}{dY} [X, Y]_n,$$

Soient encore  $U, V, W$  trois fonctions des variables  $x, y, p_i$ ; on aura identiquement

$$\frac{\partial U}{\partial p_n} [V, W]_n + \frac{\partial V}{\partial p_n} [W, U]_n + \frac{\partial W}{\partial p_n} [U, V]_n = 0, \quad (2)$$

et aussi

$$\left( \frac{dU}{dx} \right) [V, W]_n + \left( \frac{dV}{dx} \right) [W, U]_n + \left( \frac{dW}{dx} \right) [U, V]_n = 0. \quad (3)$$

Nous dirons enfin que deux fonctions  $F$  et  $\Phi$  sont *en involution d'ordre  $n$*  quand on a

$$[F, \Phi]_n = 0, \quad (4)$$

ce qui a lieu en particulier si  $F$  et  $\Phi$  sont indépendants de  $p_n$ . L'équation (4), où l'on considère  $\Phi$  comme une fonction inconnue,

admet, outre la solution manifeste  $F$ ,  $n$  intégrales distinctes. Ceci est évident si  $F$  dépend de  $p_n$ . Si  $\frac{\partial F}{\partial p_n} = 0$ , notons qu'on ne pourra avoir  $\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0$  que si  $F$  se réduit à une constante, hypothèse que nous écarterons; l'équation (4) se réduit donc à  $\frac{\partial \Phi}{\partial p_n} = 0$ , et elle admet encore  $n + 1$  intégrales distinctes, par exemple  $x, y, p_1, \dots, p_{n-1}$ .

On déduit des formules (2) et (3) que deux fonctions en involution avec une troisième qui ne se réduit pas à une constante sont en involution entre elles.

Soient  $X$  et  $Y$  deux fonctions des variables  $x, y, p_i$ . Je dis que si l'on peut trouver une troisième fonction  $P$  telle que l'on ait l'identité

$$dY - P dX = \lambda_1(dy - p_1 dx) + \lambda_2(dp_1 - p_2 dx) + \dots \\ + \lambda_n(dp_{n-1} - p_n dx) , \quad (5)$$

les coefficients  $\lambda$  n'étant pas tous nuls, les fonctions  $X$  et  $Y$  sont en involution.

En effet, en identifiant les deux membres de la relation (5), on a successivement

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - P \frac{\partial X}{\partial x} = -\lambda_1 p_1 - \lambda_2 p_2 - \dots - \lambda_n p_n \\ \frac{\partial Y}{\partial y} - P \frac{\partial X}{\partial y} = \lambda_1 , \quad \frac{\partial Y}{\partial p_i} - P \frac{\partial X}{\partial p_i} = \lambda_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (6) \\ \frac{\partial Y}{\partial p_n} - P \frac{\partial X}{\partial p_n} = 0 .$$

Éliminons les  $\lambda$  entre les équations (6) des deux premières lignes; on obtient d'abord

$$\left(\frac{dY}{dx}\right) - P \left(\frac{dX}{dx}\right) = 0 ,$$

d'où, en tenant compte de la dernière équation (6),

$$[X, Y]_n = 0 .$$





ces  $n + 2$  équations à  $n + 1$  inconnues sont compatibles, car le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial X_{n+1}}{\partial x} & p_1 \\ \frac{\partial X_1}{\partial y} & \frac{\partial X_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial X_{n+1}}{\partial y} & -1 \\ \frac{\partial X_1}{\partial p_1} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_1}{\partial p_n} & \frac{\partial X_2}{\partial p_n} & \dots & \frac{\partial X_{n+1}}{\partial p_n} & 0 \end{vmatrix}$$

peut s'écrire encore, au signe près,

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{dX_1}{dx}\right) & \left(\frac{dX_2}{dx}\right) & \dots & \left(\frac{dX_{n+1}}{dx}\right) \\ \frac{\partial X_1}{\partial p_1} & \frac{\partial X_2}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial X_{n+1}}{\partial p_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial X_1}{\partial p_n} & \frac{\partial X_2}{\partial p_n} & \dots & \frac{\partial X_{n+1}}{\partial p_n} \end{vmatrix} ;$$

ce dernier déterminant est égal à la somme d'un certain nombre de termes de la forme

$$A_i^k \left[ \frac{\partial X_i}{\partial p_n} \left(\frac{dX_k}{dx}\right) - \frac{\partial X_k}{\partial p_n} \left(\frac{dX_i}{dx}\right) \right] = A_i^k [X_i, X_k]_n :$$

il est donc nul en vertu des relations d'involution.

Les équations (9), qui sont compatibles, donnent d'ailleurs pour  $\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_{n+1}^1$  un système unique de solutions, car les fonctions  $X_1, \dots, X_{n+1}$  étant distinctes par hypothèse, on peut tirer, du tableau des coefficients du système (9), au moins un déterminant d'ordre  $n + 1$  qui ne soit pas nul. On verrait de même que l'on peut toujours, et d'une seule façon, déterminer les coefficients  $\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_{n+1}^i$  de manière à satisfaire à l'équation

$$\alpha_1^i dX_1 + \dots + \alpha_{n+1}^i dX_{n+1} = dp_{i-1} - p_i dx ,$$

( $i = 2, 3, \dots, n$ ) .

Ainsi, pour que les équations (7) définissent, quelles que soient les constantes  $a_i$ , une multiplicité  $m_n$ , il faut et il suffit que les fonctions  $X_i$  soient distinctes et deux à deux en involution d'ordre  $n$ .

Remarquons que ceci a lieu en particulier quand toutes les fonctions  $X_i$  sont indépendantes de  $p_n$ ; pour tout système de valeurs attribuées aux constantes  $a_i$ , on obtient alors une multiplicité  $m_n$  dont le support ponctuel se réduit à un point.

5. — Plus généralement considérons les équations, supposées algébriquement compatibles et distinctes,

$$X_1(x, y, p_i) = a_1, \dots, X_q(x, y, p_i) = a_q \quad (q < n + 1), \quad (10)$$

où les paramètres  $a_1, \dots, a_q$  ont reçu des valeurs particulières. Elles définissent  $\infty^{n-q+2}$  éléments d'ordre  $n$ . Cherchons s'il est possible de grouper ces éléments de façon à obtenir une famille de multiplicités  $m_n$  à  $n - q + 1$  paramètres, et cela quelles que soient les valeurs attribuées aux paramètres  $a_i$ . Il faut pour cela et il suffit qu'on puisse adjoindre aux équations (10)  $n - q + 1$  équations de la forme

$$X_{q+1} = a_{q+1}, \dots, X_{n+1} = a_{n+1}, \quad (11)$$

telles que, quelles que soient les valeurs attribuées aux paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ , les équations (10) et (11) définissent une multiplicité  $m_n$ .

Il faut donc tout d'abord que les fonctions  $X_1, \dots, X_q$  soient deux à deux en involution. *Cette condition est suffisante*; en effet, supposons-la remplie et considérons le système linéaire

$$[X_1, \Phi]_n = 0, \quad [X_2, \Phi]_n = 0, \dots, [X_q, \Phi]_n = 0, \quad (12)$$

où  $\Phi$  est la fonction inconnue. Si nous posons, pour simplifier,

$$[X_i, \Phi]_n = Y_i(\Phi),$$

on aura, il est facile de s'en assurer,

$$(Y_i, Y_k) = [[X_i, X_k]_n, \Phi]_n \equiv 0.$$

Le système (12) est donc un système en involution; par hypothèse, il admet les  $q$  intégrales  $X_1, X_2, \dots, X_q$ ; il admet

donc en outre  $n - q + 1$  intégrales distinctes  $X_{q+1}, \dots, X_{n+1}$ , et toutes ces fonctions  $X_i$  seront deux à deux en involution. Notre proposition est donc établie.

En particulier l'équation différentielle d'ordre  $n$

$$F(x, y, p_1, \dots, p_n) = a \quad (13)$$

définit  $\infty^{n+1}$  éléments d'ordre  $n$ . Intégrer cette équation, ce sera répartir les éléments qu'elle définit suivant une famille de multiplicités  $m_n$  à  $n$  paramètres, problème équivalent à la résolution complète de l'équation

$$[F, X]_n = 0 ; \quad (14)$$

on peut donc, au moyen des opérations<sup>1</sup>  $n, n-1, \dots, 2, 1$ , intégrer les  $\infty^1$  équations différentielles représentées par l'équation (13) où l'on donne à la constante  $a$  toutes les valeurs possibles. L'intégration de l'équation (14) est d'ailleurs elle-même équivalente à celle du système

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{p_1} = \dots = \frac{dp_{n-1}}{p_n} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial p_n} dp_n}{\left(\frac{dF}{dx}\right)}$$

6. — Revenons à l'équation différentielle (13), et soit  $X_1(x, y, p_i)$  une intégrale, distincte de  $F$ , de l'équation (14). Les équations

$$F = a \quad X_1 = a_1 \quad (15)$$

représentent, d'après ce que nous avons vu,  $\infty^{n-1}$  multiplicités  $m_n$ , qui sont des intégrales de l'équation proposée.

Inversement, sur toute multiplicité intégrale de l'équation (13) on a

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) dx + \frac{\partial F}{\partial p_n} dp_n = 0 ,$$

ou, en vertu de la relation d'involution,

$$\frac{\partial F}{\partial p_n} \left[ \left(\frac{dX_1}{dx}\right) dx + \frac{\partial X_1}{\partial p_n} dp_n \right] = 0 .$$

<sup>1</sup> GOURSAT. *Leçons sur l'intégration des équations du premier ordre*, p. 88.



D'autre part, en écartant les intégrales exceptionnelles  $x = c^{\text{te}}$ , on voit que la multiplicité intégrale  $m_n$  ne peut annuler  $\frac{\partial F}{\partial p_n}$  sans annuler en même temps  $\left(\frac{dF}{dx}\right)$ : nous appellerons *intégrales singulières* les multiplicités, s'il en existe, qui satisfont aux équations

$$F = a \quad \frac{\partial F}{\partial p_n} = 0 \quad \left(\frac{dF}{dx}\right) = 0 .$$

Sur toute intégrale *non singulière* de l'équation (13) on aura donc

$$\left(\frac{dX_1}{dx}\right) dx + \frac{\partial X_1}{\partial p_n} dp_n = 0 ,$$

c'est-à-dire  $X_1 = c^{\text{te}}$ . Par suite, en faisant varier la constante  $a_1$ , on pourra obtenir toutes les intégrales non singulières de l'équation (13) à partir des équations (15).

L'élimination de  $p_n$  entre ces deux équations donnera donc une équation différentielle d'ordre  $n - 1$  qui sera une intégrale intermédiaire de l'équation (13). Mais cette élimination sera inutile si l'on sait intégrer l'équation  $X_1 = a_1$ ; son intégrale générale contiendra en effet, outre  $a_1$ ,  $n$  constantes arbitraires,  $a_2, \dots, a_{n+1}$ , et, en portant dans l'équation  $F = a$  les valeurs correspondantes de  $y, p_1, \dots, p_n$ , on aura une relation, indépendante de  $x$ , entre les constantes  $a_1, \dots, a_{n+1}$ . Compte tenu de cette relation, l'intégrale générale de l'équation  $X_1 = a_1$  fera connaître l'intégrale générale de l'équation (13).

Considérons, par exemple, l'équation

$$p_2 + 2 \frac{p_1 + ap_1^{\frac{3}{2}} + p_1^2}{x - y} = 0 . \quad (16)$$

Lie a montré<sup>1</sup> que cette équation admet un groupe de trois transformations infinitésimales et en a déduit l'intégrale générale. L'équation (16) peut s'écrire

$$F(x, y, p_1, p_2) \equiv p_2 p_1^{-\frac{3}{2}} (x - y) + 2 \left( p_1^{\frac{1}{2}} + p_1^{-\frac{1}{2}} \right) = a ;$$

<sup>1</sup> Vorlesungen über Differentialgleichungen, p. 533.

l'équation

$$[F, X]_2 \equiv \frac{\partial X}{\partial x} + p_1 \frac{\partial X}{\partial y} + p_2 \frac{\partial X}{\partial p_1} + \frac{3p_2^2}{2p_1} \frac{\partial X}{\partial p_2} = 0$$

admet visiblement l'intégrale  $X_1 = p_2 p_1^{-\frac{3}{2}}$ . On a alors successivement

$$p_2 p_1^{-\frac{3}{2}} = -2a_1, \quad p_1^{-\frac{1}{2}} = a_1 x + a_2, \quad y = -\frac{1}{a_1 x + a_1 a_2} + a_3.$$

En portant cette valeur de  $y$  et les valeurs correspondantes de  $p_1$  et  $p_2$  dans l'équation (16) on obtient la relation

$$a_1 a_3 + a_2 + a = 0 :$$

l'intégrale générale de l'équation (16) s'écrit donc

$$\frac{1}{a_1 x + a_2} + a_1 y + a_2 + a = 0.$$

Supposons, plus généralement, que l'on connaisse, outre  $F$ ,  $m$  intégrales distinctes de l'équation (14),  $X_1, \dots, X_m$ ; les équations

$$F = a, \quad X_1 = a_1, \dots, X_m = a_m \quad (17)$$

représentent  $\infty^{n-m}$  multiplicités  $m_n$  qui sont des intégrales (non singulières) de l'équation proposée. Si, entre ces équations, on élimine  $p_n, p_{n-1}, \dots, p_{n-m+1}$ , on aura une équation différentielle d'ordre  $n-m$  qui sera une intégrale intermédiaire de la proposée.

Dans ce cas encore il pourra être plus avantageux, pour l'intégration effective, de déduire des équations (17) une équation d'ordre supérieur à  $n-m$ , mais dont l'intégration soit plus simple que celle de l'équation résultant de l'élimination de  $p_n, \dots, p_{n-m+1}$ . On disposera donc de plusieurs procédés pour continuer l'intégration, et, en dehors du cas où on intégrera l'équation d'ordre  $n-m$ , il se présentera comme ci-dessus un calcul d'identification fournissant une ou plusieurs relations entre les constantes arbitraires introduites au cours du calcul, le nombre des constantes indépendantes restant en définitive égal à  $n$ .

La théorie de Sophus Lie est ainsi complètement généralisée.

7. — Nous avons vu que l'intégration de l'équation

$$F(x, y, p_1, \dots, p_n) = a$$

était équivalente à celle du système.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{p_1} = \frac{dp_1}{p_2} = \dots = \frac{dp_{n-1}}{p_n} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial p_n} dp_n}{\left(\frac{dF}{dx}\right)} ; \quad (18)$$

pour déterminer une solution de ce système autre que  $F = c^{\text{te}}$  il faut en général une opération  $n$  : mais il peut arriver que, pour certaines formes particulières de la fonction  $F$ , cette détermination n'exige qu'une opération  $n' < n$ . C'est ce qui se produira en particulier si  $F$  satisfait à l'une des relations

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + p_m \varphi(p_{m-1}, p_n) \frac{\partial F}{\partial p_n} = 0 \quad (m = 1, \dots, n ; p_0 = y)$$

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \varphi(p_m, p_{m+1}, \dots, p_n) \frac{\partial F}{\partial p_n} = 0$$

(m = 1, \dots, n - 1)

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \varphi(x, p_{m+1}, \dots, p_n) \frac{\partial F}{\partial p_n} = 0 .$$

Dans le premier cas on tirera du système (18) l'équation

$$dp_{m-1} = \frac{dp_n}{\varphi(p_{m-1}, p_n)} ,$$

et on aura, par une opération 1, une intégrale première. Dans le second cas, on aura le système

$$\frac{dp_m}{p_{m+1}} = \frac{dp_m}{p_{m+2}} = \dots = \frac{dp_n}{\varphi(p_m, p_{m+1}, \dots, p_n)} ,$$

et on aura une intégrale première par une opération  $n - m$ . Même conclusion pour le 3<sup>me</sup> cas.

Cherchons, par exemple, à déterminer la fonction  $F$  de telle sorte que l'on ait

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) \equiv 0 ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p_1 \frac{\partial F}{\partial y} + p_2 \frac{\partial F}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial F}{\partial p_{n-1}} = 0 :$$

on aperçoit immédiatement les  $n + 1$  solutions

$$p_n, p_{n-1} - p_n x, \dots, p_{n-m} - p_{n-m-1} x + p_{n-m-2} \frac{x^2}{2!} - \dots \\ \dots + (-1)^m p_n \frac{x^m}{m!}, \dots, y - p_1 x + p_2 \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n p_n \frac{x^n}{n!}.$$

Les équations cherchées, qui généralisent à l'ordre  $n$  l'équation de Clairaut <sup>1</sup>, peuvent donc s'écrire

$$y - p_1 x + p_2 \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n p_n \frac{x^n}{n!} = F(p_n, p_{n-1} - p_n x, \dots),$$

$F$  désignant une fonction arbitraire, et l'on voit immédiatement que l'intégrale générale a pour expression

$$y = a_1 \frac{x^n}{n!} + a_2 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + a_n x + F(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Après l'équation de Clairaut, nous allons de même généraliser à l'ordre  $n$  l'équation de Lagrange. Montrons d'abord qu'une équation de Lagrange mise sous la forme

$$F(x, y, p_1) \equiv y + x f_1(p_1) + f_2(p_1) = 0$$

est caractérisée par le fait qu'on peut trouver deux fonctions  $\theta(p_1)$  et  $\varphi(x, p_1)$  telles que l'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p_1 \frac{\partial F}{\partial y} = \theta(p_1) \quad \frac{\partial F}{\partial p_1} = \frac{\partial}{\partial p_1} \varphi(x, p_1). \quad (19)$$

On tire, en effet, de la seconde équation (19),

$$F \equiv \varphi(x, p_1) + \psi(x, y),$$

et la première s'écrit alors

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + p_1 \frac{\partial \psi}{\partial y} \equiv \theta(p_1) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Le premier membre de cette identité est linéaire en  $p_1$ , et le second ne contient pas  $y$ ; on peut donc écrire

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + p_1 \frac{\partial \psi}{\partial y} \equiv \theta(p_1) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv A(x) p_1 + B'(x).$$

<sup>1</sup> RAFFY. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 25, p. 71.

On en tire

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = B'(x) , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = A(x) ,$$

ce qui montre que  $A$  est une constante qu'on peut toujours prendre égale à 1; il vient alors

$$\psi(x, y) = y + B(x) .$$

D'autre part on a aussi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \theta(p_1) - p_1 - B'(x) ,$$

et par suite

$$\varphi = x[\theta(p_1) - p_1] - B(x) + \omega(p_1) ,$$

donc enfin

$$F \equiv y + x f_1(p_1) + f_2(p_1) ,$$

$f_1$  et  $f_2$  désignant deux fonctions arbitraires.

Cherchons de même les fonctions  $F(x, y, p_1, \dots, p_n)$  telles que l'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p_1 \frac{\partial F}{\partial y} + \dots + p_n \frac{\partial F}{\partial p_{n-1}} = \theta(p_n) \quad \frac{\partial F}{\partial p_n} = \frac{\partial}{\partial p_n} \varphi(x, p_n) .$$

On aura d'abord

$$F = \varphi(x, p_n) + \psi_1(x, y, p_1, \dots, p_{n-1}) ,$$

et par suite

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + p_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \dots + p_n \frac{\partial \psi_1}{\partial p_{n-1}} = \theta(p_n) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = A'(x)p_n + B'(x) .$$

On en déduit, comme précédemment,

$$\varphi(x) = x\theta(p_n) - p_n A(x) - B(x) + C(p_n)$$

et ensuite

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + p_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \dots + p_{n-1} \frac{\partial \psi_1}{\partial p_{n-2}} = B'(x) , \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial p_{n-1}} = A'(x) .$$

De ces deux dernières équations on tire successivement

$$\psi_1 = p_{n-1} A'(x) + \psi_2(x, y, p_1, \dots, p_{n-2})$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + p_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \dots + p_{n-2} \frac{\partial \psi_2}{\partial p_{n-3}} = B'(x) ; \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial p_{n-2}} = -A''(x)$$

$$\psi_2 = -p_{n-2} A''(x) + \psi_3(x, y, p_1, \dots, p_{n-3})$$

$$\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x} + p_1 \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial y} = B'(x) , \quad \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial p_1} = (-1)^n A^{(n-1)}(x)$$

$$\psi_{n-1} = (-1)^n p_1 A^{(n-1)}(x) + \psi_n(x, y)$$

et enfin

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial x} = B'(x) \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial y} = (-1)^{n+1} A^{(n)}(x) .$$

Il en résulte immédiatement que  $A^{(n+1)}$  est nul;  $A(x)$  est donc un polynome de degré  $n$ ,  $N(x)$ . Nous poserons

$$N(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n ,$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$  désignant des constantes arbitraires. On aura alors

$$\psi_n = y + B(x) ,$$

et, en remontant de proche en proche,

$$\psi_1 = p_{n-1} N'(x) - p_{n-2} N''(x) + p_{n-3} N'''(x) - \dots + y + B(x) .$$

Les équations cherchées sont donc de la forme

$$F \equiv f(p_n) + x\theta(p_n) - p_n N(x) + p_{n-1} N'(x) - \dots - (-1)^{n-1} p_1 N^{(n-1)}(x) + y = 0 , \quad (20)$$

où  $f$  et  $\theta$  sont des fonctions arbitraires, et  $N$  un polynome en  $x$  de degré  $n$  dont le premier coefficient est égal à  $\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ , les  $n$  autres étant arbitraires.

Pour intégrer cette équation, remarquons que l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial p_n} = f'(p_n) + x\theta'(p_n) - N(x) , \quad \left(\frac{dF}{dx}\right) = \theta(p_n) ;$$

le système différentiel associé fournit donc l'équation

$$\theta(p_n) \frac{dx}{dp_n} - N(x) + x\theta'(p_n) + f'(p_n) = 0 ;$$

supposons cette équation intégrée et soit

$$p_n = \varpi(x, a)$$

son intégrale générale. L'équation  $p_n = \varpi(x, a)$  donne  $p_1$  en fonction de  $x$  par  $n - 1$  quadratures: on a alors  $x$  et  $y$  en fonction de  $p_1$  sans autre intégration. Ainsi l'intégration de l'équation (20) se ramène à celle d'une équation du premier ordre suivie de  $n - 1$  quadratures.

En particulier, pour  $n = 2$ , on obtient les équations

$$y - p_1 x + p_2 \frac{x^2}{2} + x\theta(p_2) + f(p_2) = 0$$

dont l'intégrale générale s'obtient par l'intégration d'une équation de Riccati suivie d'une quadrature.

8. — Considérons, d'une façon plus générale encore, les équations de la forme

$$F \equiv u(x, p_n) + v(x, y, p_1, \dots, p_{n-1}) = 0 ,$$

dont le premier membre satisfait identiquement à une relation telle que

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + \theta(x, p_n) \frac{\partial F}{\partial p_n} \equiv 0 . \quad (21)$$

Il est clair que l'équation de Lagrange, généralisée sous la forme (20), rentre dans cette classe d'équations.

En écrivant que la fonction  $F$  satisfait à la condition (21), on aura

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \theta(x, p_n) \frac{\partial u}{\partial p_n} + \frac{\partial v}{\partial x} + p_1 \frac{\partial v}{\partial y} + \dots + p_n \frac{\partial v}{\partial p_{n-1}} = 0 ,$$

ou, en introduisant une inconnue auxiliaire  $\alpha(x, p_n)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \theta(x, p_n) \frac{\partial u}{\partial p_n} + \alpha(x, p_n) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + p_1 \frac{\partial v}{\partial y} + \dots + p_n \frac{\partial v}{\partial p_{n-1}} &= \alpha(x, p_n) . \end{aligned}$$

On en déduit d'abord

$$\alpha(x, p_n) = p_n A(x) + B'(x)$$

et par suite on a, pour déterminer  $\nu$ , les deux équations

$$\frac{\partial \nu}{\partial x} + p_1 \frac{\partial \nu}{\partial y} + \dots + p_{n-1} \frac{\partial \nu}{\partial p_{n-2}} = B'(x), \quad \frac{\partial \nu}{\partial p_{n-1}} = A(x).$$

En se reportant au calcul qui a été fait pour généraliser l'équation de Lagrange, on voit que  $A(x)$  est un polynôme arbitraire de degré  $n - 1$ : nous posons

$$A(x) = (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \alpha_1 x^{n-2} + \dots + \alpha_{n-2} x + \alpha_{n-1},$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  désignant des constantes arbitraires. On aura alors

$$\nu = y - (-1)^{n-1} p_1 A^{(n-2)}(x) + \dots - p_{n-2} A'(x) + p_{n-1} A(x) + B(x),$$

et l'on voit que les équations cherchées sont de la forme

$$F \equiv y - (-1)^{n-1} p_1 A^{(n-2)}(x) + \dots \\ \dots - p_{n-2} A'(x) + p_{n-1} A(x) + \varphi(x, p_n) = 0. \quad (22)$$

On a ici

$$\frac{\partial F}{\partial p_n} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \quad \text{et} \quad \left( \frac{dF}{dx} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p_n A(x);$$

du système différentiel associé à l'équation (22) on tire alors l'équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \frac{dp_n}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + p_n A(x) \equiv 0,$$

et l'on voit que, dans ce cas encore, l'intégration de l'équation proposée se ramène à celle d'une équation du premier ordre suivie de  $(n - 1)$  quadratures.

Comme exemple, on voit aisément que les équations

$$y - p_1 x + p_2 \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n p_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + x^n f(p_n) + \varphi(p_n) = 0,$$

où  $f$  et  $\varphi$  sont des fonctions arbitraires, s'intègrent par  $n + 1$  quadratures.



Enfin, pour donner une dernière application, supposons que, dans l'équation de condition (21), la fonction  $\theta$  se réduise à une fonction de la seule variable  $x$  que nous désignerons par  $\theta^{(n+1)}(x)$ ; l'équation (21) s'écrit alors

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p_1 \frac{\partial F}{\partial y} + \dots + p_n \frac{\partial F}{\partial p_{n-1}} + \theta^{(n+1)}(x) \frac{\partial F}{\partial p_n} = 0 . \quad (23)$$

Posons

$$P = y - p_1 x + p_2 \frac{x^2}{2!} - \dots + (-1)^n p_n \frac{x^n}{n!} ,$$

$$Q_0(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} \theta^{(n)}(x) + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \theta^{(n-1)}(x) + \dots \\ \dots + x \theta'(x) - \theta(x)$$

$$Q_m(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} \theta^{(n)}(x) + (-1)^n \frac{x^{n-m-1}}{(n-m-1)!} \theta^{(n-1)}(x) + \\ \dots + (-1)^{m+1} \theta^{(m)}(x) .$$

On aura d'abord

$$\left(\frac{dP}{dx}\right) = 0 , \quad \frac{\partial P}{\partial p_n} = (-1)^n \frac{x^n}{n!} , \quad \left(\frac{dQ_0}{dx}\right) = (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!} \theta^{(n+1)}(x) ,$$

$$\frac{\partial Q_0}{\partial p_n} = 0 .$$

ce qui montre que  $P + Q_0$  est une solution de l'équation (23).

D'autre part, on aura encore

$$\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial^m P}{\partial x^m}\right) = 0 , \quad \frac{\partial}{\partial p_n} \frac{\partial^m P}{\partial x^m} = (-1)^n \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} ,$$

$$\left(\frac{dQ_m}{dx}\right) = (-1)^{n+1} \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} \theta^{(n+1)}(x) , \quad \frac{\partial Q_m}{\partial p_n} = 0 ;$$

on en déduit  $n$  nouvelles solutions distinctes de l'équation (23), savoir

$$\frac{\partial P}{\partial x} + Q_1 , \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + Q_2 , \quad \dots , \quad \frac{\partial^n P}{\partial x^n} + Q_n .$$

Les équations cherchées sont donc de la forme

$$F \left( P + Q_0 \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + Q_1, \dots, \frac{\partial^n P}{\partial x^n} + Q_n \right) = 0 ,$$

et, comme les arguments de la fonction  $F$  sont en involution, elles s'intègrent par des éliminations seulement, outre  $n + 1$  quadratures pour déterminer  $\theta(x)$ .

9. — Nous avons vu que la condition nécessaire et suffisante pour que les équations

$$X(x, y, p_1) = a , \quad Y(x, y, p_1) = b$$

représentent, quelles que soient les valeurs attribuées aux paramètres  $a$  et  $b$ , une multiplicité  $m_1$  est que les fonctions  $X$  et  $Y$  soient en involution. Cherchons maintenant à quelle condition les équations

$$X(x, y, p_1) = 0 , \quad Y(x, y, p_1) = 0 , \quad (24)$$

supposées distinctes et compatibles, définiront une multiplicité  $m_1$ .

On tire des équations (24), en introduisant, pour plus de généralité, une variable auxiliaire  $t$ ,

$$x = x(t) , \quad y = y(t) , \quad p_1 = p_1(t) . \quad (25)$$

Si ces équations définissent une multiplicité, on aura identiquement

$$\frac{dy}{dt} = p_1(t) \frac{dx}{dt} ; \quad (26)$$

de plus cette multiplicité vérifiera les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial X}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} &= 0 \\ \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} &= 0 , \end{aligned} \quad (27)$$

qu'on peut encore écrire

$$\begin{aligned} \left( \frac{dX}{dx} \right) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial X}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} &= 0 \\ \left( \frac{dY}{dx} \right) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} &= 0 . \end{aligned}$$

On ne peut avoir simultanément

$$\frac{dx}{dt} \equiv 0, \quad \frac{dp_1}{dt} \equiv 0,$$

car la relation (26) donnerait alors  $\frac{dy}{dt} = 0$ , et les équations (25) définiraient un seul élément. On aura donc, sur la multiplicité (25),  $[X, Y]_1 = 0$ : autrement dit les équations (24) ont alors pour conséquence algébrique

$$[X, Y]_1 = 0. \quad (28)$$

*Réciproquement*, supposons que les équations (24) aient pour conséquence algébrique  $[X, Y]_1 = 0$ . On déduit aisément, des relations (27) et (28), les équations

$$\begin{aligned} \left( p_1 \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) \frac{D(X, Y)}{D(y, p_1)} &= 0 \\ \left( p_1 \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right) \frac{D(X, Y)}{D(x, p_1)} &= 0, \end{aligned}$$

qui doivent être vérifiées identiquement quand on remplace  $x, y, p_1$  par leurs valeurs (25). Si les deux déterminants fonctionnels  $\frac{D(X, Y)}{D(y, p_1)}$ ,  $\frac{D(X, Y)}{D(x, p_1)}$  ne sont pas nuls tous deux, les équations (25) définissent bien une multiplicité.

Supposons que ces deux jacobiens soient nuls, et considérons  $x, y, p_1$  comme les coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point de l'espace à trois dimensions; les équations (24) définissent alors une courbe. Si le jacobien  $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$  était nul lui aussi, tous les points de cette courbe seraient des points singuliers: on peut évidemment écarter ce cas exceptionnel. La courbe (24) se réduit donc à une droite perpendiculaire au plan  $xy$ , c'est-à-dire que dans les équations (25)  $x$  et  $y$  sont des constantes; ces équations représentent donc une multiplicité  $m_1$  dont le support ponctuel se réduit à un point.

En résumé, pour que les équations (24) définissent une multiplicité, c'est-à-dire, encore, pour que les équations différentielles (24) aient une intégrale commune, il faut et il suffit qu'elles aient pour conséquence algébrique

$$[X, Y]_1 = 0.$$

Il est clair que cette conclusion a une portée générale, et l'on voit aisément comment doivent être modifiés dans ce sens les énoncés des théorèmes généraux établis précédemment. Par exemple, pour que les équations

$$X_1(x, y, p_1, \dots, p_n) = 0, \dots, X_q(x, y, p_1, \dots, p_n) = 0 \\ (q < n + 1),$$

supposées compatibles et distinctes, définissent une famille de multiplicités  $m_n$  à  $n - q + 1$  paramètres, il faut et il suffit que ces équations aient pour conséquence algébrique

$$[X_i, X_k]_n = 0$$

quels que soient les indices  $i$  et  $k$ .

10. — Nous pouvons déduire de ce qui précède une méthode générale d'intégration des systèmes d'équations différentielles à une fonction inconnue. Soit

$$X_1(x, y, p_1, \dots, p_n) = 0, \dots, X_q(x, y, p_1, \dots, p_n) = 0 \\ (q \leq n + 1) \tag{29}$$

un tel système,  $p_n$  désignant la dérivée d'ordre le plus élevé qui figure dans les fonctions  $X_1, \dots, X_q$ , dont certaines peuvent d'ailleurs être indépendantes de  $p_n$ ; nous supposons bien entendu que ces équations sont algébriquement compatibles.

Si toutes les équations

$$[X_i, X_k]_n = 0$$

sont des conséquences algébriques du système (29), ce système admet une famille à  $n - q + 1$  paramètres de multiplicités intégrales. L'élimination de  $p_n, p_{n-1}, \dots, p_{n-q+2}$  entre les équations (29) conduit alors à une équation différentielle d'ordre  $n - q + 1$  qui est équivalente au système (29).

Si quelques-unes des équations

$$[X_i, X_k]_n = 0$$

ne sont pas des conséquences algébriques du système (29), elles fourniront un certain nombre d'équations nouvelles

$$X_{q+1} = 0, \dots, X_{q+r} = 0$$

qui devront être vérifiées par les multiplicités intégrales du système (29). En les adjoignant aux équations de ce système, on obtiendra un nouveau système sur lequel on pourra raisonner de la même façon. On arrivera donc ainsi, par des éliminations seulement, soit à une équation différentielle unique, dont l'intégration sera équivalente à celle du système (29), soit à des équations algébriquement incompatibles, soit enfin à un système de  $n + 1$  équations définissant des éléments isolés.

11. — Nous avons appelé précédemment *intégrales singulières* de l'équation

$$F(x, y, p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (30)$$

les multiplicités, s'il en existe, qui satisfont aux équations

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p_n} = 0, \quad \left(\frac{dF}{dx}\right) = 0, \quad (31)$$

En appliquant au système (31) la méthode indiquée au n° 10, on voit qu'on pourra toujours, par des éliminations seulement, reconnaître s'il existe des intégrales singulières.

Considérons d'abord le cas où le système (31) se réduit à deux équations compatibles et distinctes; comme on peut toujours supposer que l'équation (30) a été mise sous une forme telle qu'elle n'entraîne pas  $\frac{\partial F}{\partial p_n} = 0$ , notre hypothèse sera donc que la troisième équation (31) est une conséquence des deux premières. On a alors

$$\left[F, \frac{\partial F}{\partial p_n}\right]_n \equiv \frac{\partial F}{\partial p_n} \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial p_n}\right) - \frac{\partial^2 F}{\partial p_n^2} \left(\frac{dF}{dx}\right),$$

et le crochet est nul en vertu des équations (31): donc ces équations définissent  $\infty^{n-1}$  intégrales singulières, ce qui généralise un résultat classique dans la théorie des équations du premier ordre.

Parmi les équations de ce type, on peut citer<sup>1</sup> les équations de Clairaut généralisées, pour lesquelles on a

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) \equiv 0.$$

<sup>1</sup> BOUNITZKY. *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 31, p. 250.

M. Appell a démontré<sup>1</sup> que pour qu'une équation

$$F(x, y, p_1, \dots, p_n) = 0,$$

algébrique, entière et irréductible par rapport à  $y, p_1, \dots, p_n$ , admette une intégrale générale de la forme

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_{n+1} y_{n+1},$$

où les  $y_i$  sont des fonctions de  $x$  linéairement indépendantes et les  $C_i$  des constantes liées par une relation algébrique entière, il faut et il suffit qu'il existe une fonction  $\lambda(x)$  telle que l'expression

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + p_{n+1} \frac{\partial F}{\partial p_n} - \lambda F$$

se décompose en deux facteurs dont l'un soit linéaire et homogène en  $y, p_1, \dots, p_{n+1}$ . Soit  $P$  ce facteur; on aura alors une identité de la forme

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) + p_{n+1} \frac{\partial F}{\partial p_n} - \lambda F \equiv P \cdot Q;$$

M. Appell ajoute que l'équation

$$Q = 0$$

pourra donner des intégrales singulières.

Or remarquons que l'on peut toujours supposer le coefficient de  $p_{n+1}$  dans  $P$  égal à 1: on aura donc

$$Q \equiv \frac{\partial F}{\partial p_n};$$

d'ailleurs l'équation

$$\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0$$

est dans ce cas une conséquence des équations

$$F = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial p_n} = 0.$$

Par suite, sous la seule condition que ces deux équations soient algébriquement compatibles, l'équation proposée aura *effectivement*  $\infty^{n-1}$  intégrales singulières.

<sup>1</sup> Comptes rendus de l'Académie des Sciences. 12 novembre 1888.

Supposons en second lieu que les équations (31) soient algébriquement distinctes. Elles ont pour conséquence

$$\left[ F, \frac{\partial F}{\partial p_n} \right]_n = 0 \quad \left[ F, \left( \frac{dF}{dx} \right) \right]_n = 0 ;$$

si donc elles entraînent en outre

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial p_n}, \left( \frac{dF}{dx} \right) \right]_n = 0 , \quad (32)$$

l'équation (30) aura  $\infty^{n-2}$  intégrales singulières. Sinon on adjoindra l'équation (32) au système (31), et on continuera suivant la méthode indiquée au n° 10.

Soit, par exemple, l'équation

$$F \equiv 3p_2^2 - 4y = 0 .$$

dont l'intégrale générale peut s'écrire

$$x - \int_a^y \left( b - \frac{8}{3\sqrt{3}} y^{\frac{3}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} dy = 0 .$$

On a ici

$$\frac{\partial F}{\partial p_2} = 6p_2 , \quad \left( \frac{dF}{dx} \right) = -4p_1 , \quad \left[ \frac{\partial F}{\partial p_n}, \left( \frac{dF}{dx} \right) \right]_2 = -24p_2 ;$$

les équations

$$3p_2^2 - 4y = 0 , \quad p_2 = 0 , \quad p_1 = 0$$

définissent une intégrale singulière qui est la courbe  $y = 0$ .

Soit encore l'équation du premier ordre

$$F \equiv p_1(4x^2 - 3xy - y - 4) + y(3y - 4x) = 0 ;$$

les trois équations

$$F = 0 , \quad \frac{\partial F}{\partial p_1} = 0 , \quad \left( \frac{dF}{dx} \right) = 0$$

sont ici distinctes, et elles déterminent six éléments du premier ordre à distance finie

$$(1, 0, 1) , \quad (-1, 0, 2) ; \quad (1, 0, 0) , \quad (-1, 0, 0) ; \\ (-3, -4, 1) , \quad (-3, -4, 2) .$$

L'intégrale générale

$$2x^2 - 3xy + \lambda y^2 - y - 2 = 0$$

se compose de coniques qui admettent toutes les deux éléments (1, 0, 1) et (-1, 0, 2), à l'exception de l'intégrale  $y = 0$  ( $\lambda$  infini); les deux éléments (1, 0, 0) et (-1, 0, 0) appartiennent à cette intégrale; enfin les deux éléments (-3, -4, 1) et (-3, -4, 2) correspondent au point commun aux deux droites en lesquelles dégénère la conique pour  $\lambda = 1$ .

---

## SUR UNE NOUVELLE ET IMPORTANTE GÉNÉRALISATION DE L'ÉQUATION DE LAPLACE

PAR

André BLOCH (Paris).

---

1. — Dans une Note remarquable<sup>1</sup>, qui resta malheureusement sans continuation, M. G. GIRAUD a établi qu'une certaine fonction, déduite d'un système de fonctions hyperfuchsiennes, et qui constitue un invariant différentiel de ce système par rapport à l'hypersphère fondamentale, satisfait à l'équation aux dérivées partielles:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right)^2 = e^u.$$

Cette équation présente une analogie parfaite avec l'équation bien connue  $\Delta u = e^u$  de la théorie des fonctions fuchsiennes.

L'expression qui figure au premier membre est extrêmement intéressante; nous l'appellerons *double laplacien* de la fonction  $u$

---

<sup>1</sup> Sur une équation aux dérivées partielles, non linéaire, du second ordre, se rattachant à la théorie des fonctions hyperfuchsiennes (*Comptes Rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 166, 1918, p. 893).