Introduction.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

NOMBRE DIMENSIONNEL ET ENSEMBLES IMPROPRES DANS LE PROBLÈME DE DIRICHLET

PAR

M. Georges BOULIGAND (Poitiers).

INTRODUCTION.

1. — Il est important d'étudier l'allure d'un potentiel d'après la structure de l'ensemble potentiant et les caractères de la répartition des masses sur cet ensemble. C'est par cette affirmation que j'entamais la rédaction d'une courte note, intitulée: *Dimension*, *étendue*, *densité*, déposée en pli cacheté le 17 novembre 1924, cette note a été ouverte en séance par l'Académie des Sciences au début de 1925 [1]. M. Maurice FRÉCHET m'a presque aussitôt averti qu'en s'inspirant des idées de M. CARATHÉODORY sur le problème de la mesure [2], M. HAUSSDORFF avait déjà publié une étude profonde des mêmes questions [3].

J'avais appelé *ensembles partitifs* les ensembles sur lesquels il est possible de définir une répartition uniforme de masses. Ces ensembles étaient également ceux auxquels on pouvait étendre, avec M. Haussdorff, la théorie de la mesure, adaptée à une certaine valeur δ du nombre dimensionnel. La notion d'ensemble partitif n'avait d'ailleurs, pour les applications dont je m'occupais, qu'une importance limitée. Elle m'avait principalement servi à construire des exemples susceptibles de guider mes recherches: ainsi, je mentionnais dans la note citée l'ensemble triadique de Cantor, obtenu en enlevant d'un segment unitaire de droite un segment de même milieu, de longueur $\lambda < 1$, faisant sur chaque

[1] *C. R.*, t. 180, 1925, p. 245. Le présent travail emprunte ses éléments à cette note originelle et à une note récente (*C. R.*, t. 184, p. 430, fév. 1927).
[2] Ueber das lineare Mass von Punktmengen, *Göttingen Nachrichten*, 1914.
[3] Dimension und äusseres Mass (*Math. Ann.*, t. 79, 1918).

segment restant, à une homothétie près, la même ablation, et itérant indéfiniment cette opération. Pour un tel ensemble, la partitivité résulte immédiatement de l'existence de sous-ensembles semblables à l'ensemble total; si l'on fait une homothétie de rapport $\frac{1-\lambda}{2}$, qui fait passer du segment unitaire à l'un des segments subsistant après la première ablation, c'est-à-dire si l'on divise l'étalon de longueur par $\frac{2}{1-\lambda}$, la figure qu'il est naturel d'appeler: « *l'étalon associé* (c'est-à-dire construit sur l'unité de longueur) d'ÉTENDUE SUR L'ENSEMBLE » est divisée par 2. Le nombre dimensionnel δ doit donc être tel que l'on ait

$$\left(\frac{2}{1-\lambda}\right)^{\delta} = 2$$

relation qui s'écrit tout naturellement en étendant le processus suivant lesquels, dans les cas élémentaires (longueur, aire, volume) le nombre de dimensions réagit lors d'une similitude. Pour cet ensemble, on obtenait donc, moyennant la définition citée de δ:

$$\delta = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{2}{1-\lambda}\right)} .$$

Mais M. Haussdorff avait lui-même étudié cet exemple: bien plus, il avait considéré un type d'ensemble linéaire d'une très grande généralité, lui permettant de concrétiser cette idée que j'avais simplement donnée en remarque, dans la note citée: c'est que le clavier des nombres ordinaires pouvant devenir insuffisant (pareillement à ce qui se produit dans la théorie de la croissance) il y avait lieu d'introduire *un ordre dimensionnel* pour certains ensembles, tout comme M. Borel a introduit pour certaines fonctions un *ordre de croissance.*

Pour conclure, je me trouvais donc dispensé de publier le travail assez important résumé dans la note citée.

2. — Ainsi que je l'ai annoncé, la notion de mesure généralisée n'avait pour mes recherches qu'une importance assez minime. Il s'agissait seulement, pour les problèmes que j'avais en vue, d'exprimer que le nombre dimensionnel satisfaisait à certaines

inégalités, les ensembles étudiés pouvant de ce fait présenter une généralité beaucoup plus grande que les ensembles tombant sous le coup des considérations de M. Haussdorff, une moins grande homogénéité dans la structure se trouvait requise et par là, je me rapprochais du caractère presque complètement arbitraire des ensembles formant la frontière d'un domaine pour lequel on cherche à résoudre le problème de Dirichlet, par exemple.

Ces remarques permettront d'apercevoir de prime abord l'esprit dans lequel est rédigé le présent travail. Dans un premier chapitre, pour accoutumer le lecteur à la considération du nombre dimensionnel, nous avons formé différents exemples, aussi simples que possible, et qui de ce fait même, se rapportent à des ensembles partitifs. Ces exemples, intéressants par eux-mêmes, montrent notamment que les courbes rectifiables ne sont qu'un cas particulier d'une famille de courbes beaucoup plus générales, douées d'une métrique, fournissant une représentation intrinsèque.

Dans le second chapitre, nous montrons que la considération du nombre dimensionnel d'un ensemble permet, d'une manière incomplète, mais suffisante dans beaucoup d'applications, de caractériser les ensembles impropres du problème de Dirichlet : on étudie pour cela l'allure du potentiel produit par une répartition de masses, placée sur l'ensemble donné, au voisinage de ces masses; on obtient ainsi deux théorèmes (A et B), qui sont la contrepartie l'un de l'autre (sans qu'il y ait toutefois réciprocité). Malgré quoi, ces théorèmes sont souvent décisifs. Nous verrons en outre, en les appliquant aux exemples précédemment étudiés, qu'ils nous conduiront à des remarques importantes, relatives à la convergence de certaines intégrales dont l'élément devient infini (n° 13).

Chapitre Premier.

Ensembles, lignes et surfaces ayant des nombres dimensionnels variés.

3. — Pour donner accès aux considérations que nous allons exposer, il est opportun de présenter d'abord quelques exemples à la suite desquels apparaîtra mieux l'utilité des notions que nous aurons à introduire.