

# Nouvelle forme de la question précédente. Etude d'une relation homographique.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

lution de celle-ci est réductible aux fonctions elliptiques quel que soit le coefficient  $a_0$ . Il suffit de rendre nul  $\alpha_4$  en posant  $x = z - z_0$ , puis de poser

$$x = \frac{a_3}{\xi - \frac{1}{2}a_2}$$

pour se ramener à une équation

$$4\xi^3 - g_2\xi - g_3 = \square .$$

Les invariants se présentent sous leur forme habituelle, où  $a_4 = 0$ . Bref, cette méthode conduit à la représentation suivante de la solution générale de l'équation de Fermat pour  $a_4 = 0$ :

$$x = \frac{p'^w}{p^t - p^w} , \quad \sqrt{X} = \frac{p'^t}{p'^w} \cdot x^2 .$$

Comme d'une manière générale  $p'^w = -\frac{\sigma(2w)}{\sigma^4 w}$ , ces expressions sont identiques à celles qui viennent d'être données, en liant les arguments  $u$  et  $t$  par la relation:

$$u = t + w .$$

#### NOUVELLE FORME DE LA QUESTION PRÉCÉDENTE.

##### ÉTUDE D'UNE RELATION HOMOGRAPHIQUE.

7. — L'étude arithmogéométrique de certaines classes de triangles remarquables pose la question suivante:

« Former les équations du second degré, à racines rationnelles, dont la somme et le produit sont reliés homographiquement. »

La résolution de cette question dépend des fonctions elliptiques, avec un cas étendu de dégénérescence.

Voici l'étude complète de cette question.

8. — *Formules générales.* — Soient  $S$  et  $P$  la somme et le produit des racines de l'équation du second degré; ces expressions sont liées par la relation homographique:

$$P = \frac{AS + B}{S - s} ,$$

à trois coefficients  $A, B, s$ ; avec la condition  $As + B \neq 0$ . Les racines étant supposées rationnelles la quantité

$$D = S^2 - 4P = \square ,$$

est un carré parfait et, par suite aussi, le polynôme suivant du quatrième degré en  $S$ :

$$D(S - s)^2 \equiv S^4 - 2sS^3 + (s^2 - 4A)S^2 + 4(As - B)S + 4Bs = \square .$$

La question est ainsi ramenée à une équation de FERMAT, c'est-à-dire aux fonctions elliptiques.

Les invariants  $g_2$  et  $g_3$  des fonctions de WEIERSTRASS ont ici les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3 \cdot g_2 &= s^4 + 16As^2 + 24Bs + 16A^2 = (s^2 + 8A)^2 + 24(Bs - 2A^2) , \\ 8 \cdot 27 \cdot g_3 &= - [s^6 + 24As^4 + 36Bs^3 + 120A^2s^2 + 288ABs - 64A^3 + 216B^2] \\ &= - [(s^2 + 8A)^3 + 36(Bs - 2A^2)(s^2 + 8A) + 216B^2] ; \end{aligned}$$

l'expression du discriminant  $\Delta$ , ordonnée par rapport aux puissances du paramètre  $s$ , n'est que du cinquième degré et se présente finalement sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \Delta &= - (As + B)^2 [Bs^3 - A^2s^2 + 18ABs + 27B^2 - 16A^3] , \\ 4 \cdot 27 \Delta &= - (As + B)^2 \{ [54B + s(s^2 + 18A)]^2 - (s^2 + 12A)^3 \} . \end{aligned}$$

La solution fondamentale de définition,

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 p u - g_3 ,$$

des fonctions de WEIERSTRASS est

$$\begin{aligned} p^\nu &= \frac{s^2 + 8A}{12} , & p'^\nu &= -B , & p''^\nu &= 2A^2 - Bs . \\ p^{2\nu} &= \frac{s^2}{12} - \frac{A^2}{B}s + \frac{A^4}{B^2} - \frac{4}{3}A , \\ p'^{2\nu} &= \frac{A^2}{B}s^2 + \left( 2A - 3\frac{A^4}{B^2} \right) s + \frac{2A^6}{B^3} - 4\frac{A^3}{B} + B . \end{aligned}$$

Dans le cas actuel,  $\frac{\nu}{2}$  est l'argument d'un arithmopoint de la cubique:

$$p^{\frac{\nu}{2}} = \frac{s^2 - 4A}{12} , \quad p'^{\frac{\nu}{2}} = As + B , \quad p''^{\frac{\nu}{2}} = -s \cdot p'^{\frac{\nu}{2}} .$$

D'où:

$$p\left(\frac{3}{2}\nu\right) = \frac{s^2}{12} + \frac{B}{A}s + \frac{B^2}{A^2} - \frac{A}{3},$$

$$p'\left(\frac{3}{2}\nu\right) = \frac{B}{A}\left(s + \frac{B}{A}\right) \cdot \left(s + \frac{2B^2 - A^3}{AB}\right).$$

Pour A, B et s quelconques, les arguments  $\frac{\nu}{2}$ ,  $\nu$ ,  $\frac{3}{2}\nu$  et  $2\nu$  donnent ainsi des expressions de  $pu$  et  $p'u$  qui sont des polynomes en s, du second degré au plus.

Les formules de correspondance entre les solutions de l'équation cubique et l'équation de Fermat sont:

$$S - \frac{1}{2}s = \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u - p'\nu}{pu - p\nu}, \quad \pm \sqrt{D}(S - s) = p(u + \nu) - pu;$$

et inversement:

$$2pu + p\nu = \left(s - \frac{1}{2}s\right)^2 \mp \sqrt{D}(S - s),$$

$$p'u - p'\nu = (2S - s) \cdot (pu - p\nu).$$

Pour  $u = \nu$ , la vraie valeur de S est:

$$S = \frac{1}{2} \left[ s + \frac{p''\nu}{p'\nu} \right];$$

donc une première solution de l'équation de Fermat est:

$$S = s - \frac{A^2}{B}, \quad P = -\frac{B}{A} \left( s + \frac{B^2 - A^3}{AB} \right), \quad \sqrt{D} = s + \frac{2B^2 - A^3}{AB};$$

les racines de l'équation correspondante du second degré sont:

$$X' = -\frac{B}{A}, \quad X'' = s + \frac{B^2 - A^3}{AB}.$$

A l'argument  $u = -2\nu$  correspond le même couple ( $X'$ ,  $X''$ ).

A l'argument  $u = -\frac{\nu}{2}$  correspond la solution sans intérêt  $S = s$ .

Aux valeurs  $u = \frac{\nu}{2}$  et  $u = -\frac{3\nu}{2}$  de l'argument correspondent la solution évidente  $S = -\frac{B}{A}$ ,  $P = 0$ .

Pour  $u = 2v$ :

$$S = \frac{A^2}{B} \cdot \frac{s - \frac{A^2}{B} + \frac{2B}{A} - \frac{B^3}{A^4}}{s - \frac{A^2}{B} + \frac{2B}{A}},$$

$$S - s = - \frac{\left(s + \frac{B}{A} - \frac{A^2}{B}\right)^2}{s + \frac{2B}{A} - \frac{A^2}{B}}, \text{ etc.}$$

9. — En général, le problème d'homographie admet ainsi une infinité de solutions, qui correspondent aux multiples entiers de l'argument  $\omega$ . Ainsi que vont le mettre en évidence les considérations du paragraphe suivant, l'équation présentement étudiée est équivalente à l'équation la plus générale ayant la solution donnée  $\omega$ . En général donc, il n'y a pas d'autre solution rationnelle que celle de la forme  $u = n.\omega$ , avec  $v + 2\omega =$  période.

En général,  $v$  et  $\omega$  ne sont pas des parties aliquotes de période et il y a une infinité de solutions. Mais lorsque le rapport de  $v$  et d'une période est un nombre commensurable, les solutions données par  $v = n\omega$  sont en nombre limité.

Cette circonstance se produit lorsque  $B = 0$ , car alors  $p'v = 0$  (voir paragraphe 21). Il en est de même lorsque  $A = 0$ .

Pour  $A = 0$ ,

$$12g_2 = s(s^3 + 24B), \quad 8.27g_3 = 108B^2 - (s^3 + 18B)^2,$$

$$\Delta = -B^3(s^3 + 27B),$$

$$p^v = \frac{s^2}{12}, \quad p'^v = -B, \quad p''^v = -Bs,$$

$$p^{\frac{v}{2}} = p^{2v} = p^v;$$

$p3\omega$  devient infini, et par suite :

$$\omega = \frac{2}{3}\varpi;$$

$2\varpi$  étant une période. Deux arithmopoints seulement sont connus sur la cubique; ce sont des points d'inflexion.

10. — En dehors de ces cas relativement généraux  $A = 0$  ou  $B = 0$ , on peut encore citer le cas

$$A = -1, \quad B = 1, \quad s = 3,$$

pour lequel

$$p^{\omega} = \frac{13}{12}, \quad p'^{\omega} = +2, \quad p''^{\omega} = 6,$$

$$p^{\nu} = \frac{1}{12}, \quad p'^{\nu} = -1, \quad p''^{\nu} = -1,$$

$$p^{3\omega} = -\frac{11}{12}, \quad p'^{3\omega} = 0,$$

$$p^{2\nu} = \frac{1}{12}, \quad p'^{2\nu} = 1;$$

$$\nu = \frac{2\omega}{3};$$

ici encore les arithmopoints de la cubique se réduisent aux points d'inflexion, à un sommet et aux points qui s'en déduisent par alignement: au total, cinq arithmopoints sur la cubique. C'est à cette circonstance particulière qu'est liée l'*inexistence d'arithmotriangles pseudoisosocèles*.

11. — Le problème d'homographie, qui vient d'être posé et résolu, dépend ainsi d'une équation de Fermat du type spécial pour lequel le polynome du quatrième degré a un zéro rationnel.

L'argument  $\omega = -\frac{\nu}{2}$  est tel que:

$$p^{\omega} = \frac{s^2 - 4A}{12}, \quad p'^{\omega} = -(As + B) \neq 0, \quad p''^{\omega} = s \cdot p'^{\omega}.$$

Réciproquement, soit l'équation la plus générale de Fermat pour laquelle se produise la circonstance spécifiée. Elle peut être caractérisée par l'ensemble des valeurs numériques de  $p^{\omega}$ ,  $p'^{\omega}$  et  $p''^{\omega}$ . D'où successivement  $s$ ,  $A$  et  $B$ :

$$s = \frac{p''^{\omega}}{p'^{\omega}}, \quad A = \frac{s^2}{4} - 3p^{\omega}, \quad B = -(As + p'^{\omega})$$

par trois formules nettes de toute indétermination.

Par suite, les équations de Fermat, pour un polynome du quatrième degré avec zéro rationnel, jouissent de cette nouvelle propriété

de donner toujours lieu à une homographie entre le produit et la somme des racines d'équations du second degré.

La valeur de  $p'\omega$  doit essentiellement, être distincte de zéro.

12. — *Expression des résultats.* — Les considérations exposées dans la première partie de ce travail trouvent une application immédiate dans l'expression finale des résultats du problème d'homographie.

$$S = \frac{1}{2} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} + s \right),$$

$$S - s = \frac{1}{2} \left( \frac{p'u - p'v}{pu - pv} - s \right) = \frac{\sigma 2\omega}{\sigma^2 \omega} \cdot \frac{\sigma^2(u - \omega)}{\sigma(u - 2\omega) \cdot \sigma u},$$

car  $S - s$  n'est autre ici que la fonction  $x$  des paragraphes 5 et 6; le polynome en  $S$  admet  $s$  pour zéro rationnel:

$$S - s = x.$$

Il vient ensuite:

$$\sqrt{D}(S - s) = p(u + v) - pu;$$

les racines  $X'$  et  $X''$  de l'équation du second degré sont alors:

$$(S - s) \cdot X' = pu - p\omega,$$

$$(S - s) \cdot X'' = p(u + v) - p\omega;$$

$$X' = \frac{1}{\sigma 2\omega} \cdot \frac{\sigma u \cdot \sigma(3\omega - u)}{\sigma(u - \omega) \cdot \sigma(u - 2\omega)},$$

$$X'' = \frac{1}{\sigma 2\omega} \cdot \frac{\sigma(u + \omega) \cdot \sigma(u - 2\omega)}{\sigma u \cdot \sigma(v - u)},$$

$$\frac{X'}{X''} = \frac{\sigma(u + \omega)}{\sigma(u - 3\omega)} \cdot \frac{\sigma^2(u - 2\omega)}{\sigma^2 u}.$$

$$P = p^2\omega - p(u - \omega) = \frac{\sigma(u - 3\omega) \cdot \sigma(u + \omega)}{\sigma^2 2\omega \cdot \sigma^2(u - \omega)}.$$

On peut encore écrire:

$$X' = \gamma \frac{p\left(u - \frac{3}{2}\omega\right) - p\left(\frac{3}{2}\omega\right)}{p\left(u - \frac{3}{2}\omega\right) - p\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

$$X'' = \gamma \frac{p\left(u - \frac{\omega}{2}\right) - p\left(\frac{3}{2}\omega\right)}{p\left(u - \frac{\omega}{2}\right) - p\left(\frac{\omega}{2}\right)};$$

la constante  $\gamma$  a pour expression :

$$\gamma = -\frac{1}{\sigma(2\omega)} \cdot \left[ \frac{\sigma\left(\frac{3}{2}\omega\right)}{\sigma\left(\frac{1}{2}\omega\right)} \right]^2.$$

En général  $p\left(\frac{3}{2}\omega\right)$  et  $p\frac{\omega}{2}$  sont irrationnelles; cette irrationalité n'est introduite qu'en apparence dans les expressions de  $X'$  et  $X''$ .

Considérées comme fonction de  $u$ , les racines  $X'$  et  $X''$  satisfont à l'identité

$$X''(u) \equiv X'(u + \omega) ;$$

c'est la même fonction avec des arguments différents de la constante  $\omega$  (propriété caractéristique des relations doublement quadratiques et symétriques).

13. — *Equation avec P pour inconnue.* — Comme  $S - s = x$ , la méthode du paragraphe 8 revient à prendre pour inconnue une quantité inversement proportionnelle à  $S - s$ ; mais ici :

$$S = \frac{Ps + B}{P - A}, \quad S - s = \frac{As + B}{P - A}.$$

en prenant  $P$  pour inconnue principale, on est assuré *a priori* d'avoir à rendre carré un polynôme cubique. En fait, l'équation en  $P$  est :

$$\begin{aligned} D(P - A)^2 &= (Ps + B)^2 - 4P(P - A)^2, \\ -4P^3 + (s^2 + 8A)P^2 + 2(Bs - 2A^2)P + B^2 &= \square. \end{aligned}$$

Ce qui conduit aux formules suivantes :

$$\begin{aligned} P &= p^\nu - p^t, & P - A &= p^\omega - p^t, \\ S - s &= \frac{p'^\omega}{p^t - p^\omega}; & \sqrt{D} &= \frac{p'^t}{p^t - p^\omega}, \\ X' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{s(p^t - p^\nu) + p'^\nu - p'^t}{p^t - p^\omega} \equiv \frac{1}{2} \cdot \frac{-f(-t)}{p^t - p^\omega}, \\ X'' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{s(p^t - p^\nu) + p'^\nu + p'^t}{p^t - p^\omega} \equiv \frac{1}{2} \cdot \frac{-f(t)}{p^t - p^\omega}, \end{aligned}$$



en introduisant la fonction  $f(t)$  du paragraphe 5:

$$f(t) \equiv p't - p'' - s(p^t - p^v) ;$$

d'où pour  $X'$  et  $X''$  les expressions en produits de sigma se réduisant à celles du paragraphe 12 par simple changement d'argument  $u = t + \omega$ .

14. — *Etude directe de la relation entre  $X'$  et  $X''$ .* — Les racines  $X'$ ,  $X''$  sont liées par la relation

$$xy(x + y - s) = A(x + y) + B ,$$

représentative d'une cubique plane. La discussion précédente a mis en évidence l'existence d'arithmopoints sur cette cubique quels que soient  $A$ ,  $B$  et  $s$ :

$$x = -\frac{B}{A}, \quad y = s + \frac{B^2 - A^3}{AB},$$

$$x = -\frac{B}{A}, \quad y = 0, \dots$$

et ceux qui en résultent par symétrie par rapport à l'axe  $x = y$ .

D'autre part, si on se donne  $x$ , l'équation en  $y$  est du second degré; de même l'équation en  $x$  pour une valeur donnée de  $y$ . Ainsi, de tout couple donné  $(x_1, y_1)$  représentatif d'un arithmopoint, il est possible de déduire immédiatement deux nouvelles solutions  $(x_1, y_2)$  et  $(x_2, y_1)$  et ainsi de suite dans les deux sens.

Ceci revient à partir d'un arithmopoint de cette cubique plane et à mener les parallèles à l'une et à l'autre des asymptotes  $x = 0$ ,  $y = 0$ . C'est sous une forme élémentaire l'addition des arguments des fonctions elliptiques.

La cubique considérée peut-être représentée par les fonctions de Weierstrass au moyen des formules qui ont été données aux paragraphes 12 et 13, pour les expressions de  $X'$  et  $X''$ .

#### INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

15. — Soient  $t, t'$  deux arithmopoints quelconques d'une arithmoconique (P) du plan des coordonnées. En désignant par S et P