cas B = 0 et les triangles héroniens.

Le cas B = 0 et les triangles héroniens.

21. — Pour $B = 0$, c'est-à-dire pour la relation

$$\frac{A}{P} + \frac{s}{S} = 1 \ ,$$

l'équation $D = 0$ est satisfaite pour $S = 0$ et $P = 0$. Par suite, quels que soient A et s, l'équation cubique a la racine rationnelle

$$e_1 = \wp\omega_1 = \wp\nu = \frac{s^2 + 8A}{12} \ , \qquad \nu = \omega_1 + \text{période} \ .$$

Il en résulte les formules suivantes:

$$g_2 = 4(3e_1^2 - A^2) \ ,$$
$$g_3 = 4e_1(A^2 - 2e_1^2) \ ,$$
$$\Delta = 16A^4(ge_1^2 - 4A^2) \ ;$$

$$\wp'^2 u = 4(\wp u - e_1) \cdot [\wp^2 u + e_1 \wp u + A^2 - 2e_1^2] \ ;$$

$$(e_2 - e_3)^2 = 9e_1^2 - 4A^2 = \frac{s^2}{16}(s^2 + 16A) \ .$$

Lorsque $s^2 + 16A$ est positif, les trois racines existent et e_1 est la plus grande des racines:

$$e_1 > e_2 > e_3$$
$$(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = A^2 \ ;$$

cette dernière expression se présentant comme un carré parfait, les valeurs de $\wp u$, pour $\frac{\omega_1}{2}$ et $\frac{\omega_1}{2}$ + une demi-période, sont rationnelles. On obtient ainsi:

$$\wp\psi_1 = \frac{s^2 - 4A}{12} \ , \qquad \wp'\psi_1 = \pm As \ , \qquad \wp''\psi_1 = - As^2 \ ,$$

$$\wp\psi_2 = \frac{s^2 + 20A}{12} \ , \qquad \wp'\psi_2 = \pm A\sqrt{s^2 + 16A} \ , \qquad \wp''\psi_2 = A(s^2 + 16A) \ ;$$

$2\psi_1$ et $2\psi_2$ étant égaux à ω_1 (à une demi-période près); au signe près ψ_1 est d'ailleurs égal à $\frac{\nu}{2} + \omega'$.

22. — Les trois racines sont rationnelles, lorsque $s^2 + 16A$ est un carré; alors ψ_2 est l'argument d'un arithmopoint de la cubique.

Soit, dans ce cas, $A = \frac{\lambda^2 - s^2}{16}$, $B = 0$. En fonction des paramètres rationnels s et λ, il vient:

$$3.64.g_2 = \lambda^4 + \lambda^2 s^2 + s^4 ,$$
$$27.2^9.g_3 = (\lambda^2 + s^2)(\lambda^4 - 34\lambda^2 s^2 + s^4) ,$$
$$2^{16}\Delta = \lambda^2 s^2 (\lambda^2 - s^2)^2 .$$

$$24e_1 = \lambda^2 + s^2 > 0 ,$$
$$48e_2 = -(\lambda^2 - 6\lambda s + s^2) < 0 ,$$
$$48e_3 = -(\lambda^2 + 6\lambda s + s^2) < 0 .$$

$$e_1 - e_2 = \frac{1}{16}(\lambda - s)^2 , \quad e_1 - e_3 = \frac{1}{16}(\lambda + s)^2 , \quad e_2 - e_3 = \frac{1}{4}\lambda s ;$$

on peut toujours supposer λ positif, ce qui assure l'ordre des racines $e_1 > e_2 > e_3$.

En posant $s = 2(b + c)$, $\lambda = 2(c - b)$, $c > b$, ces formules rentrent comme cas particulier dans celles qui ont été données plus haut (paragraphe 17); a est ici égal à zéro:

$$A = -bc , \quad B = 0 , \quad s = 2(b + c) ,$$

$$g_2 = \frac{4}{3}(b^4 - b^2c^2 + c^4) , \quad g_3 = \frac{4}{27}(b^2 + c^2)(b^2 - 2c^2)(c^2 - 2b^2) ,$$

$$\Delta = 16b^4c^4(b^2 - c^2)^2 ,$$

$$e_1 = \frac{b^2 + c^2}{3} , \quad e_2 = \frac{c^2 - 2b^2}{3} , \quad e_3 = \frac{b^2 - 2c^2}{3} ,$$

$$e_1 - e_2 = b^2 , \quad e_1 - e_3 = c^2 , \quad e_2 - e_3 = c^2 - b^2 .$$

$$\nu = \omega_1 , \quad \wp\nu = e_1 , \quad \wp'\nu = 0 , \quad \wp''\nu = 2b^2c^2 ,$$

$$\alpha = \frac{\nu}{2} , \quad \wp\frac{\nu}{2} = \frac{b^2 + 3bc + c^2}{3} , \quad \wp'\frac{\nu}{2} = -2bc(b + c) ,$$

$$\wp\beta = \frac{b^2 - 3bc + c^2}{3} , \quad \wp'\beta = 2bc(c - b) ,$$

$$\gamma = -\beta ;$$

aux arguments α, β, γ correspondent les racines $S = 0, 2b$ et $2c$ de l'équation $D = 0$; à $u = \omega_1$ correspond une valeur infinie de S. A $u = \omega_2$ et ω_3 correspond: $S = b + c$, $P = bc$, $X' = b$, $X'' = c$.

Le cas de $B = 0$, avec $s = 2$ et A carré, présente cette particularité intéressante de représenter la solution du problème suivant : *détermination de tous les triangles héroniens ayant un côté donné et une aire imposée.* J'étudierai la question prochainement.

Cas élémentaire de dégénérescence des fonctions elliptiques.

23. — L'expression du discriminant Δ des fonctions elliptiques, abstraction faite du facteur double $As + B$, qui ne saurait être nul sans dégénérescence de l'homographie, se présente sous forme d'un polynome du second degré seulement par rapport au paramètre B. Les deux autres paramètres A et s étant supposés donnés, rationnels et quelconques, l'équation $\Delta = 0$ n'a des racines rationnelles en B que si $s^2 + 12\,A$ est un carré. En introduisant un nouveau paramètre rationnel et arbitraire, ω, cette dernière condition est satisfaite de la manière la plus générale en prenant :

$$A = \frac{\omega^2 - s^2}{12} ;$$

d'où l'expression correspondante du discriminant :

$$\Delta = -27(As + B)^2(B - B_1)(B - B_2) ,$$

avec :

$$4.27B_1 = s^3 - 3\omega^2 s - 2\omega^3 = (s + \omega)^2.(s - 2\omega) ,$$

$$4.27B_2 = s^3 - 3\omega^2 s + 2\omega^3 = (s - \omega)^2.(s + 2\omega) ;$$

$$27(B_2 - B_1) = \omega^3 .$$

Le changement de signe sur ω produit l'échange des valeurs de B_1 et B_2; en supposant que ω peut prendre toutes les valeurs rationnelles et algébriques, le discriminant Δ s'annule donc lorsque les coefficients A et B sont de la forme générale suivante :

$$A = \frac{\omega^2 - s^2}{12}, \qquad B = \frac{1}{108}(s - \omega)^2.(s + 2\omega) ,$$