cubique unicursale.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

SUR LES TRIANGLES PSEUDO-ISOSCÈLES

PAR

M. Emile TURRIÈRE (Montpellier).

Dans un précédent article[1] relatif aux *Formules elliptiques pour la résolution de certaines équations de Fermat*, j'ai été amené à faire allusion aux triangles pseudo-isoscèles de Steiner (paragraphe 10).

Dans les lignes qui suivent, quelques considérations nouvelles vont être données au sujet de cette classe de triangles:

$$c^3 - (a + b) c^2 + 3abc - (a + b) ab = 0 \ ,$$

ainsi que sur leurs relations avec deux cubiques planes.

UNE CUBIQUE UNICURSALE.

1. — Reprenons tout d'abord les formules générales de résolution des équations de FERMAT.

Lorsque le polynome du quatrième degré, qui doit être rendu carré parfait par un choix convenable de la variable x, se présente sous la forme d'un produit de deux facteurs quadratiques à coefficients réels et rationnels,

$$X = (x^2 + 2Ax + B)(x^2 + 2Cx + D) \ ,$$

les constantes elliptiques s'expriment simplement par l'intermédiaire des discriminants δ_1 et δ_2, $\delta_1 = A^2 - B$, $\delta_2 = C^2 - D$ et de l'invariant mixte

$$\delta_1 + \delta_2 - (A - C)^2 = 2AC - (B + D) = 6e \ ,$$

[1] *Enseignement math.*, XXVI^e année, 1927, p. 260-286.

dont la propriété est d'exprimer par la formule $e = 0$ que les couples de racines des trinômes quadratiques sont conjugués harmoniques. Le calcul des constantes elliptiques donne alors:

$$g_2 = \delta_1 \delta_2 + 3e^2 , \qquad g_3 = e(e^2 - \delta_1 \delta_2) ,$$
$$\Delta = \delta_1 \delta_2 (9e^2 - \delta_1 \delta_2)^2 ,$$

$$\wp v = \frac{1}{4}(\delta_1 + \delta_2 - 2e) , \qquad \wp' v = \frac{1}{4}(\delta_1 - \delta_2)(A - C) ;$$

$$\wp'' v = \frac{1}{8}[3\delta_1^2 + 3\delta_2^2 + 2\delta_1 \delta_2 - 12e(\delta_1 + \delta_2)] ;$$

e est précisément une racine de la résolvante cubique; soit $e = \wp\omega$; les deux autres racines e' e'' de $\wp' u = 0$ sont telles que:

$$(e' - e'')^2 = \delta_1 \delta_2 , \qquad (e - e')(e - e'') = \frac{1}{4}(9e^2 - \delta_1 \delta_2) ;$$
$$\wp v - e_1 = \frac{1}{4}(A - C)^2 .$$

La condition d'existence des trois racines est $\delta_1 \delta_2 > 0$. Pour $\delta_1 \delta_2 > 9e^2$, la racine e est comprise entre e' et e''. Pour $0 < \delta_1 \delta_2 < 9e^2$, e est la plus grande racine ou la plus petite racine suivant qu'elle est positive ou négative.

2. — Ces remarques générales trouvent une application dans l'étude de la question suivante. *Etant donné un triangle* ABC, *déterminer les couples* AA′ et BB′ *de droites issues des sommets respectifs* A *et* B, *limitées aux côtés opposés qui sont égales et rationnellement mesurées en fonction des côtés* a, b *et* c *du triangle.*

Résolvons d'abord la question de géométrie que pose la condition d'égalité AA′ = BB′. Soit M le point de concours des droites AA′ et BB′, soit (D) la droite joignant leurs pieds A′ B′. En coordonnées barycentriques si (ξ, η, ζ) sont les coordonnées du point M et (u, v, w) les coordonnées tangentielles de la droite (D), ce point M et cette droite (D) sont associés dans la transformation qu'expriment les formules:

$$u\xi = v\eta = - w\zeta .$$

Les longueurs AA′ et BB′ sont:

$$\overline{AA'}^2 = \frac{c^2\eta^2 + (b^2 + c^2 - a^2)\eta\zeta + b^2\zeta^2}{(\eta + \zeta)^2} = \frac{b^2v^2 - (b^2 + c^2 - a^2)vw + c^2w^2}{(v - w)^2}$$

$$\overline{BB'}^2 = \frac{a^2\zeta^2 + (c^2 + a^2 - b^2)\xi\zeta + c^2\xi^2}{(\zeta + \xi)^2} = \frac{a^2u^2 - (b^2 + c^2 - a^2)uw + c^2w^2}{(u - w)^2} .$$

Pour AA′ = BB′, le lieu du point M est une courbe du troisième degré et l'enveloppe de (D) est une courbe de quatrième classe, dont les équations, ponctuelle pour l'une et tangentielle pour l'autre, résultent immédiatement de la comparaison des expressions ci-dessus. Introduisons deux paramètres λ et μ par les formules

$$u = \frac{\lambda - 1}{\lambda} w \qquad v = \frac{\mu - 1}{\mu} w ;$$

les expressions des longueurs deviennent:

$$\overline{AA'}^2 = a^2\mu^2 - (a^2 + b^2 - c^2)\mu + b^2 .$$

$$\overline{BB'}^2 = b^2\lambda^2 - (a^2 + b^2 - c^2)\lambda + a^2 .$$

L'égalité AA′ = BB′ correspond au fait que le point représentatif de coordonnées ordinaires λ et μ décrit une conique; cette conique passe par les deux points ($\lambda = 1$, $\mu = 1$) et ($\lambda = -1$, $\mu = -1$), auxquelles correspondent pour la longueur commune L = AA′ = BB′ les valeurs $L^2 = c^2$ et $L^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$. Dans le premier cas, L n'est autre que le côté BA; dans le second, L est le double de la médiane issue de C.

La cubique lieu de M a un point double C_1 quatrième sommet du parallélogramme complétant ABC. Les formules (S = surface du triangle):

$$\xi + \xi_1 = 2S , \qquad \eta + \eta_1 = 2S , \qquad \zeta + \zeta_1 = 0$$

$$\xi = \eta_1 + \zeta_1 , \qquad \eta = \xi_1 + \zeta_1 ,$$

$$\xi_1 = \eta + \zeta , \qquad \eta_1 = \xi + \zeta ,$$

donnent pour équation de la même cubique, relativement au triangle de référence ABC_1:

$$\zeta_1(b^2\xi_1^2 - a^2\eta_1^2) = \xi_1\eta_1[(a^2 + c^2 - b^2)\eta_1 - (b^2 + c^2 - a^2)\xi_1] .$$

Le rapport de ξ_1 à η_1 est indiqué comme paramètre de représentation de la cubique:

$$\frac{\xi}{\eta_1[(a^2-c^2)\xi_1^2+(a^2+c^2-b^2)\xi_1\eta_1-a^2\eta_1^2]}=\frac{\eta}{\xi_1[(c^2-b^2)\eta_1^2-(b^2+c^2-a^2)\xi_1\eta_1+b^2\xi_1^2]}$$

$$=\frac{\zeta}{\xi_1\eta_1[(b^2+c^2-a^2)\xi_1-(a^2+c^2-b^2)\eta_1]}\ .$$

D'où:

$$(b^2\xi_1^2-a^2\eta_1^2)^2(\mathrm{L}^2-c^2)=\xi_1\eta_1[(b^2+c^2-a^2)\xi_1-(a^2+c^2-b^2)\eta_1]$$
$$[a^2(b^2+c^2-a^2)\eta_1-b^2(a^2+c^2-b^2)\xi_1]\ .$$

D'ailleurs la représentation de la conique transformée (λ, μ) se fait en posant $\frac{\mu-1}{\lambda-1}=t$; si T désigne l'expression,

$$\mathrm{T}=b^2-a^2t^2\ ,$$

on obtient pour les deux courbes considérées:

$$\begin{aligned} u &= -\mathrm{W}_0\,.\,\mathrm{W}_1\ , & \xi &= t\,.\,\mathrm{W}_2\ ,\\ v &= t\,.\,\mathrm{W}_0\,.\,\mathrm{W}_2\ , & \eta &= -\mathrm{W}_1\ ,\\ w &= \mathrm{W}_1\mathrm{W}_2\ , & \zeta &= t\mathrm{W}_0\ ,\end{aligned}$$

avec trois polynomes en t:

$$\begin{aligned} \mathrm{W}_0 &= t(a^2+c^2-b^2)-(b^2+c^2-a^2)\ ,\\ \mathrm{W}_1 &= t^2(c^2-b^2)-t(b^2+c^2-a^2)+b^2\ ,\\ \mathrm{W}_2 &= a^2t^2-t(b^2+c^2-a^2)+c^2-a^2\ .\end{aligned}$$

D'où la condition définitive:

$$\mathrm{T}^2(\mathrm{L}^2-c^2)=-t[(a^2+c^2-b^2)t-(b^2+c^2-a^2)]$$
$$[a^2(b^2+c^2-a^2)t-b^2(a^2+c^2-b^2)]\ .$$

Il n'est pas inutile d'observer que ce choix de paramètre, s'il n'a qu'une importance secondaire sous le point de vue habituel de la Géométrie analytique, doit être fait judicieusement pour mener à bien les calculs d'analyse indéterminée qui suivront. Dans l'indétermination de la représentation paramétrique de la conique (par exemple en prenant pour paramètre le rapport de $\mu+1$ à $\lambda+1$), le numérateur de la fraction exprimant

$L^2 - c^2$ est généralement du quatrième degré. On connaît toujours les quatre zéros rationnels de $L^2 - c^2$; ce sont quatre solutions de l'équation de Fermat, mais lorsqu'il s'agit d'étudier le polynome du quatrième degré correspondant à L^2, les coefficients sont non seulement compliqués mais les deux coefficients extrêmes ne se présentent pas comme carrés. Afin d'appliquer les formules de représentation au moyen des fonctions de Weierstrass il est indispensable de faire subir à l'équation une transformation homographique de variable lui assurant une solution nulle ou infinie, c'est-à-dire rendant carré parfait l'un ou l'autre des deux coefficients extrêmes. Le choix précédent du paramètre t donne au polynome $T^2(L^2 - c^2)$ les deux zéros $t = 0$ et t infini; par suite le polynome de l'équation de Fermat a nécessairement ses coefficients extrêmes tous deux carrés parfaits comme étant identiques à ceux du polynome du quatrième degré $(cT)^2$. Effectivement:

$$(a^2t^2 - b^2)^2 L^2 = a_0 t^4 + 4a_1 t^3 + 6a_2 t^2 + 4a_3 t + 4a_4 ,$$

avec:

$$a_0 = a^4c^2 , \qquad a_4 = b^4c^2 ,$$

$$4a_1 = -a^2(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2) ,$$

$$4a_3 = -b^2(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2) ,$$

$$6a_2 = (a^2 + b^2)[c^4 + (a^2 - b^2)^2] - 2c^2(a^4 + b^4 - a^2b^2) .$$

3. — Quels sont d'autre part les zéros du polynome $T^2 L^2$? La cubique lieu de M est circulaire et l'on obtient des solutions de $AA' = BB'$ en joignant A et B aux points cycliques du plan du triangle: ce qui correspond à quatre droites particulières D. Comme AA' et BB' sont alors des droites isotropes on se trouve précisément en présence des solutions de l'équation $L = 0$, c'est-à-dire des quatre zéros du polynome du quatrième degré: Les valeurs de λ et μ

$$\frac{a}{b}\mu = e^{\pm iC} , \qquad \frac{b}{a}\lambda = e^{\pm iC} ,$$

donnent

$$\lambda = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 4\varepsilon iS}{2b^2} , \qquad \mu = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 4\varepsilon' iS}{2a^2} ,$$

avec $\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 = 1$. D'où quatre valeurs pour t, deux par deux conjuguées,

$$t = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2 \pm 4iS}{b^2 + c^2 - a^2 \pm 4iS},$$

correspondant aux quatre combinaisons possibles des signes de $4iS$. Il en résulte que le polynome du quatrième degré est nécessairement :

$$\begin{aligned} T^2L^2 = {} & [a^2t^2 + (a^2 + b^2 - c^2)t + b^2] . \\ & .[a^2c^2t^2 - [(a^2 + b^2)c^2 - (a^2 - b^2)^2]t + b^2c^2] , \end{aligned}$$

(à un facteur constant près que l'on détermine par comparaison de terme de plus haut degré et qui se trouve être l'unité positive). Ainsi la considération des droites isotropes issues des sommets A et B conduit directement au résultat, donné plus haut dans la représentation rationnelle des courbes unicursales enveloppe de (D) et lieu du point M.

Dans le cas actuel, les formules plus générales du paragraphe 1 donnent :

$$\delta_1 = -\frac{4S^2}{a^4}, \qquad \delta_2 = -\frac{4S^2}{a^4c^4}(a^2 - b^2)^2,$$

$$e = -\frac{4}{3} \cdot \frac{S^2}{a^4c^4}(a^2 + b^2) < 0 ;$$

$\delta_1\delta_2$ est carré, ce qui entraine $\Delta =$ carré et l'existence des trois racines rationnelles de la résolvante $\wp'u = 0$; e est la plus petite racine. En supposant $a > b$, par exemple, les racines sont, dans l'ordre $e_1 > e_2 > e_3$:

$$e_1 = \frac{4S^2}{3a^4c^2}(2a^2 - b^2), \quad e_2 = \frac{4S^2}{3a^4c^2}(2b^2 - a^2), \quad e_3 = -\frac{4S^2}{3a^4c^2}(a^2 + b^2),$$

$$e_1 - e_2 = \frac{4S^2(a^2 - b^2)}{a^4c^2}, \qquad e_1 - e_3 = \frac{4S^2}{a^2c^2}, \qquad e_2 - e_3 = \frac{4S^2b^2}{a^4c^2};$$

$$(e_3 - e_1)(e_3 - e_2) = \left[\frac{4S^2b}{a^3c^2}\right]^2.$$

Cette dernière expression étant le carré d'une fonction rationnelle des trois côtés, les arguments égaux aux quarts de la période $2\omega_3$ donnent les valeurs rationnellles à la fonction $\wp u$; mais des valeurs imaginaires à la fonction $\wp'u$.

Les autres constantes elliptiques sont:

$$g_2 = \frac{64\,S^4}{3a^8c^4}(a^4 + b^4 - a^2b^2)\,, \quad g_3 = \frac{256}{27}\,\frac{S^6}{a^{12}c^6}(a^2+b^2)(2a^2-b^2)(2b^2-a^2)\,,$$

$$\mathrm{p}v = \frac{4S^2}{3a^4c^4}[12S^2 - (a^2+b^2)c^2]\,,$$

$$\mathrm{p}'v = \frac{8\,S^4}{a^6c^6}[(a^2-b^2)^2 - c^4]\,.$$

Les triangles pseudoisoscèles.

4. — Déterminons l'intersection de la cubique lieu de M avec la bissectrice intérieure de l'angle C, dont l'équation est $\frac{\xi}{a} = \frac{\eta}{b}$. Nous introduisons l'inconnue auxiliaire ψ telle que

$$\frac{\xi}{a} = \frac{\eta}{b} = \frac{\zeta}{c\psi}\,;$$

et nous poserons

$$a + b = c\,.\,\Sigma\,, \qquad ab = c^2\,.\,\Pi\,.$$

L'équation des points d'intersection est alors:

$$(a-b)\,.\,\{\Pi(\Sigma^2 + 4\psi\Sigma + 2\psi^2 + 1) + \psi(\Sigma+\psi)(\psi\Sigma+1)\} = 0\,.$$

Si le triangle n'est pas isocèle (AB = AC), cette relation peut être mise sous la forme

$$\Pi = -\,\psi\,.\,\frac{(\Sigma+\psi)(\psi\Sigma+1)}{\Sigma^2 + 4\psi\Sigma + 2\psi^2 + 1}\,.$$

Si maintenant on considère ψ comme un nombre constant, cette équation exprime une condition, symétrique entre a et b, à laquelle est soumise le triangle ABC.

Remarquons que si, pour un triangle quelconque, deux points sont pris, l'un A′ sur le côté BC, le second B′ sur le côté CA, tels que

$$\frac{BA'}{c\psi} = \frac{A'C}{b}\,, \qquad \frac{CB'}{a} = \frac{B'A}{c\psi}\,,$$

le lieu du point M d'intersection des droites AA′ et BB′, pour les diverses valeurs de ψ, est la bissectrice intérieure de l'angle