3. — Opportunité d'une définition directe du jacobien.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Remarques. — Nous venons d'employer la locution *volume.* Par volume, nous entendons ici un domaine (= ensemble d'un seul tenant dont chaque point peut être pris pour centre d'une sphère dont tous les points appartiennent à l'ensemble) dont la *mesure intérieure* et la *mesure extérieure* sont égales. Ces mesures sont définies à l'aide d'un *réseau binaire progressif* (formé à partir d'un cube initial arbitraire, du pavage régulier de l'espace obtenu en lui juxtaposant des cubes égaux, et de tous les pavages analogues qui s'en déduisent par subdivision binaire des arêtes, indéfiniment répétée). La mesure intérieure est alors la borne supérieure des volumes polyèdres intérieurs au domaine donné et obtenus par sommation de cubes du réseau indéfini, tandis que la mesure extérieure est la borne inférieure des volumes des polyèdres englobant le domaine et obtenus aussi par sommation de cubes du réseau indéfini. Le domaine donné est un volume seulement quand ces bornes sont égales.

3. — *Opportunité d'une définition directe du jacobien.*

Il n'est pas nécessaire de passer par l'intermédiaire de la transformation linéaire tangente pour définir le jacobien. L'hypothèse d'existence de cette transformation introduit à la généralité d'inutiles restrictions. Supposons que les formules (2) soient du type suivant :

$$X = x \qquad Y = y \qquad Z = z + \psi(x, y) .$$

Nous aurons une transformation conservant les volumes, en grandeur et en signe. Il est donc naturel de lui attribuer un jacobien égal à $+ 1$. Cependant, si la fonction $\psi(x, y)$ n'a pas de dérivées, il n'y aura pas de transformation linéaire tangente.

Il y a donc lieu de définir le jacobien directement. On peut proposer diverses définitions, exigeant chacune une revision des propositions ci-dessus rappelées, notamment du théorème relatif à la réversibilité locale de la transformation. En réalité, nous n'aurons ici à raisonner que sur des transformations intégralement biunivoques (déformations), à la classe desquelles les transformations infinitésimales appartiennent nécessairement.

Le moment est revenu de préciser nos hypothèses sur la transformation $\mathcal{T}$.

a) A une région $\mathcal{R}_M$ de $\mathcal{E}_M$, elle fait correspondre biunivoquement et continument une région $\mathcal{R}_P$ de $\mathcal{E}_P$.

b) A toute sphère intérieure à $\mathcal{R}_M$ correspond effectivement un *volume* intérieur à $\mathcal{R}_P$. Soit v le volume de la sphère, v' son correspondant.

c) Soit un point *fixe* intérieur à $\mathcal{R}_M$; prenons une sphère infiniment petite de centre M; alors le rapport $\frac{v'}{v}$ tend vers une limite déterminée J (M).

d) Lorsque M décrit une région quelconque, strictement intérieure à $\mathcal{R}_M$, la famille des fonctions $\frac{v'}{v}$ de M (dépendant du paramètre v) est bornée dans son ensemble, cette borne s'appliquant nécessairement à J (M).

e) J (M) est continue à l'intérieur de $\mathcal{R}_M$.

Nous appellerons J (M) le *jacobien sphérique centré*, locution proposée par M. Wilkosz et qui a l'avantage de rappeler les conditions particulières de la définition, favorables dans certaines recherches, par exemple pour l'obtention de l'harmonicité moyennant des hypothèses simples et bien conformes au mode d'invariance du laplacien [1] qui sera défini comme une divergence sphérique centrée (nº 7).

4. — *Valeur du volume après une déformation finie.*

Dans tout ce qui suit les intégrations ont lieu au sens de M. Lebesgue. Des hypothèses *c*) et *d*) nous déduisons d'abord ce résultat : à tout *volume* (intérieur à $\mathcal{R}_M$) du premier espace correspond un *volume* du second.

Il suffit pour cela d'établir que le transformé d'un ensemble de mesure nulle est aussi de mesure nulle. Servons-nous d'un

[1] Dans d'autres questions, il pourra être plus avantageux de faire usage d'un jacobien sphérique non centré, ou encore d'un jacobien cubique (locutions qui se comprennent d'elles-mêmes). Notons que pour le théorème de variance des intégrales multiples, qui va nous occuper, et qui appartient en réalité à la géométrie linéaire, il est indiqué d'utiliser une forme de jacobien obtenue en substituant aux sphères de centre M des volumes v tels que la figure (M, v) reste homothétique d'une figure fixe. Il n'y a d'ailleurs qu'une simple transposition à faire dans la démonstration qui va être donnée, en remplaçant les sphères de centre M par les volumes v soumis à l'hypothèse précédente.