Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1928)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ROTATIONNEL ET FORMULE DE STOKES
Autor: Bouligand, Georges / Roussel, Andrè
Kapitel: 4. — Valeur du volume après une déformation finie.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21866

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Le moment est revenu de préciser nos hypothèses sur la transformation $\mathfrak{T}$.

a) A une région $\mathcal{R}_M$ de $\mathcal{E}_M$, elle fait correspondre biunivoquement et continument une région $\mathcal{R}_P$ de $\mathcal{E}_P$.

b) A toute sphère intérieure à $\mathcal{R}_M$ correspond effectivement un *volume* intérieur à $\mathcal{R}_P$. Soit v le volume de la sphère, v' son correspondant.

c) Soit un point *fixe* intérieur à $\mathcal{R}_M$; prenons une sphère infiniment petite de centre M; alors le rapport $\frac{v'}{v}$ tend vers une limite déterminée J (M).

d) Lorsque M décrit une région quelconque, strictement intérieure à $\mathcal{R}_M$, la famille des fonctions $\frac{v'}{v}$ de M (dépendant du paramètre v) est bornée dans son ensemble, cette borne s'appliquant nécessairement à J (M).

e) J (M) est continue à l'intérieur de $\mathcal{R}_M$.

Nous appellerons J (M) le *jacobien sphérique centré*, locution proposée par M. Wilkosz et qui a l'avantage de rappeler les conditions particulières de la définition, favorables dans certaines recherches, par exemple pour l'obtention de l'harmonicité moyennant des hypothèses simples et bien conformes au mode d'invariance du laplacien [1] qui sera défini comme une divergence sphérique centrée (n° 7).

4. — *Valeur du volume après une déformation finie.*

Dans tout ce qui suit les intégrations ont lieu au sens de M. Lebesgue. Des hypothèses *c*) et *d*) nous déduisons d'abord ce résultat : à tout *volume* (intérieur à $\mathcal{R}_M$) du premier espace correspond un *volume* du second.

Il suffit pour cela d'établir que le transformé d'un ensemble de mesure nulle est aussi de mesure nulle. Servons-nous d'un

[1] Dans d'autres questions, il pourra être plus avantageux de faire usage d'un jacobien sphérique non centré, ou encore d'un jacobien cubique (locutions qui se comprennent d'elles-mêmes). Notons que pour le théorème de variance des intégrales multiples, qui va nous occuper, et qui appartient en réalité à la géométrie linéaire, il est indiqué d'utiliser une forme de jacobien obtenue en substituant aux sphères de centre M des volumes v tels que la figure (M, v) reste homothétique d'une figure fixe. Il n'y a d'ailleurs qu'une simple transposition à faire dans la démonstration qui va être donnée, en remplaçant les sphères de centre M par les volumes v soumis à l'hypothèse précédente.

réseau binaire progressif. Il nous permettra d'enfermer l'ensemble dans une infinité de cubes dont la somme des volumes est arbitrairement petite. On peut énoncer la même propriété pour la somme des volumes des sphères circonscrites à ces cubes; or, de l'hypothèse *d*) nous tirons une limite supérieure pour la somme des volumes transformés des cubes, égale au produit d'un nombre fixe par la somme des volumes des sphères précédentes. Le résultat est donc établi. En même temps, il est clair qu'à tout nombre positif ε, il est possible de faire correspondre un nombre positif δ tel que l'inégalité:

$$\text{mes. d'un ens. de } \mathcal{R}_M < \delta$$

entraîne:

$$\text{mes. ens. transf. } < \varepsilon$$

c'est ce qu'on exprime en disant que la transformation $\mathfrak{T}$ est *absolument continue.*

Il s'agit maintenant de prouver qu'à un volume quelconque V, complètement intérieur à $\mathcal{R}_M$, correspond un volume V′ (nécessairement intérieur à $\mathcal{R}_P$) donné par la formule:

$$V' = \int_V J(M)\, d\omega_M \,. \tag{3}$$

Pour cela, nous tablerons sur la possibilité de trouver à l'intérieur de chaque volume un système d'une infinité dénombrable de sphères, mutuellement extérieures, et dont l'ablation ne laisserait subsister qu'un ensemble de mesure nulle. Admettons cette possibilité, qu'il suffirait d'établir pour un cube, le volume pouvant être obtenu au moyen d'une infinité dénombrable de cubes d'un réseau indéfiniment progressif.

En vertu de ce lemme, nous pourrons trouver dans Ω un premier ensemble E de sphères, conformément aux conditions indiquées. De E_1 passons à un ensemble analogue E_2, en prenant chaque sphère de E_1, enlevant de celle-ci une sphère concentrique et de rayon moitié, et appliquant le lemme au volume restant. En répétant indéfiniment ce procédé, nous aurons une suite:

$$E_1, E_2, \ldots E_l, \ldots$$

d'ensembles de sphères dont les centres formeront des ensembles désignés par

$$e_1, e_2, \ldots e_k, \ldots$$

L'ensemble e_k contient tous les e_i d'indices $i < k$. L'ensemble e_∞ formé de tous les points des e_k est dénombrable et *partout dense.*

Soit maintenant la fonction $J_k(M)$ définie dans les sphères de E_k de la manière suivante: dans chaque sphère dont le volume est v, nous lui attribuons la valeur constante $\frac{v'}{v}$. Cette fonction est partout définie dans V, sauf sur un ensemble de mesure nulle où nous pouvons la prendre égale à J(M). L'intégrale de la fonction ainsi construite a évidemment pour valeur le volume V', quelque soit k. Donc, lorsque k croît indéfiniment, elle tend vers une limite égale à V'. Or, *en vertu de la continuité de* J(M), les fonctions $J_k(M)$ qui sont bornées d'après *d*) tendent vers J(M) dans tout V lorsque k croît indéfiniment. La formule (3) apparaît alors comme une conséquence immédiate de ce théorème classique de Lebesgue: *l'intégrale de la limite dans le champ des fonctions bornées est égale à la limite de l'intégrale.*

Notons que le raisonnement présenté sous cette forme ne peut se passer de l'hypothèse de la continuité de J(M) : l'ensemble sur lequel nous savons d'une manière immédiate (c'est-à-dire sans invoquer la continuité) que $J_k(M)$ tend vers J(M) se compose de l'ensemble dénombrable e_∞ et d'une suite dénombrable d'ensembles de mesure nulle omis à chaque application de ce lemme. La limite n'est donc assurée sans la continuité que sur un ensemble de mesure nulle. Mais, si l'on fait l'hypothèse de la continuité, entraînant l'uniforme continuité, on voit aisément que cette limite est partout assurée.

5. — *Conditions de validité de la formule* (3).

Le champ de validité de la formule (3) est en réalité beaucoup plus large que le champ défini par les hypothèses *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Cette formule subsiste en réalité dans les conditions les plus générales pour lesquelles le second membre a un sens, c'est-à-dire lorsque la fonction J (M) existe et est sommable. La dé-