

# SUR LE ROLE DE L'AXIOMATIQUE DANS LA PHYSIQUE MODERNE

Autor(en): **Gonseth, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21877>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LE ROLE DE L'AXIOMATIQUE DANS LA PHYSIQUE MODERNE <sup>1</sup>

PAR

F. GONSETH (Berne).

---

Il me semble nécessaire, pour prévenir toute erreur quant à l'objet de cette conférence, de préciser sans attendre quelles sont mes intentions. En évoquant la méthode axiomatique dans ses rapports avec la physique moderne, c'est sur la première que je chercherai à faire peser le poids de la discussion. Ce sont les caractères de la méthode axiomatique qui — si j'atteinds au but que je me propose — devront sortir, précisés et mieux décrits, de l'analyse que nous allons entreprendre.

Pour réaliser ces intentions j'aurais pu ne pas sortir du domaine de la géométrie, et même de la géométrie élémentaire. Nous y aurions trouvé un terrain d'expériences suffisant... Vous vous demanderez, s'il en est ainsi, pourquoi j'ai trouvé nécessaire d'auréoler mon sujet du mystère qui s'attache encore aux dernières théories de la physique d'aujourd'hui.

C'est que la géométrie nous est trop familière. Notre esprit la pratique depuis trop longue date pour que nous puissions encore y découvrir, avec simplicité et sans trop de subtilité, les points d'appui nécessaires à toute marche de l'esprit vers un point de vue nouveau. Les mots d'axiome, de postulat, de théorème, etc... ont été prononcés trop souvent en géométrie et nous les avons interprétés trop souvent dans un sens plus ou moins conventionnel et conforme à la tradition pour que nous

---

<sup>1</sup> Conférence faite à Neuchâtel, le 29 septembre 1928, à la réunion annuelle de la Société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire.

puissions facilement en retoucher le sens. C'est pourquoi je vous invite à changer de terrain, et à franchir la ligne de démarcation — ligne d'ailleurs plus ou moins imaginaire —, qui sépare la géométrie de la mécanique et de la physique.

La première question à laquelle il nous faut nous arrêter est naturellement la suivante: *Peut-on en quelques mots décrire l'aspect que prend la méthode axiomatique dans ses applications à la physique ?*

On le peut !

Il n'est pas très difficile de le faire voir et spécialement à ceux qui ont eu à s'occuper de l'enseignement de la géométrie élémentaire. La mode actuelle exige — et je ne lui donne pas tort — que cet enseignement débute par de la géométrie expérimentale. L'élève dessine et construit dans le réel, avec du papier, des ciseaux et de la colle, les figures et les corps simples. Pendant ce stade préparatoire, les premières notions géométriques de ligne droite, d'angle, de mouvement, d'égalité, de symétrie prennent corps, sont intuitivement fondées. Et c'est seulement lorsque ce fondement intuitif a suffisamment de cohérence et de consistance que le travail logique doit intervenir. On peut alors passer résolument aux notions abstraites correspondant aux notions intuitives qui ont été tout d'abord évoquées.

C'est aussi à cet endroit — tous les maîtres qui ont enseigné ces matières le savent — que se trouve le tournant dangereux. Il faut effectuer une sorte de saut périlleux du concret dans l'abstrait, du monde réel dans le monde des concepts, du donné dans le pensé.

Or c'est aussi à ce moment précis qu'intervient la méthode axiomatique. Les concepts abstraits de point, de ligne, d'angle, ...etc. sont à accepter comme concepts fondamentaux, qu'il ne faut pas chercher à réduire à d'autres concepts plus primitifs encore. Et certaines observations, qu'on a enregistrées dans le stade intuitif, sont à remplacer par certaines relations abstraites entre les concepts fondamentaux: ces relations sont les *axiomes* qu'il faut accepter sans velléité de démonstration... parce que toute possibilité de démontrer quoi que ce soit fait encore défaut.

Sur cette base axiomatiquement acceptée et intuitivement fondée, tout l'édifice de la géométrie s'élève ensuite, construit

par les seuls moyens du raisonnement logique et de la démonstration purement abstraite.

A dessein, je me contenterai ici de cette description un peu sommaire, et j'éviterai une discussion plus approfondie de la signification et du rôle des concepts fondamentaux et des axiomes. Je veux simplement faire observer qu'une des façons les plus satisfaisantes de choisir une base axiomatique pour la géométrie est de grouper toutes les notions fondamentales autour de la notion de groupe des déplacements et d'invariance par rapport à ce groupe.

Ceci dit je passe immédiatement à la question préliminaire qui nous occupe: Quel rôle l'axiomatique joue-t-elle actuellement dans la physique ? La réponse est d'une insurpassable simplicité: « Le même, exactement » !

En effet, le physicien dans son étude des phénomènes de la nature commence en général — il est clair que ce que je dis est un peu schématique, et que l'acte de la recherche n'a pas tout-à-fait autant de logique simplicité que nous allons le dire... — le physicien commence en général par accumuler et analyser des sensations; sensations qui lui viennent du monde extérieur, par le canal de ses sens aidés de ses instruments.

Il ordonnera et coordonnera ses observations selon des lois qui tout d'abord seront surtout empiriques. Mais dès l'instant où il cherchera à édifier la théorie d'un phénomène, il se trouvera exactement dans la même situation que notre professeur de mathématiques de tout à l'heure. Les concepts qui figurent dans une théorie sont aux nombres mesurés, aux coïncidences observées dans le réel, dans le même rapport — en principe naturellement — que le sont les concepts intuitifs de la géométrie aux notions fondamentales axiomatiquement acceptées.

Prenons comme exemple le concept de temps. On peut distinguer tout d'abord le *temps expérimental*, qui est celui que mesurent les horloges et les chronomètres. (Ce serait d'ailleurs une erreur de croire que ce temps à une signification *purement expérimentale* et que sa mesure s'opère véritablement en dehors de toute théorie.)

Mais aussitôt que nous parlons du temps  $t$  qui figure dans les équations de la mécanique ordinaire, ou du temps  $s$  de la méca-



nique relativiste, la chose a complètement changé de face. Ces temps mathématiques  $t$  ou  $s$ , sont des concepts abstraits, axiomatiquement acceptés dans leurs relations logiques avec d'autres concepts fondamentaux, et avant tout avec ceux de la géométrie.

Une façon fort commode d'établir ici une base axiomatique suffisante consiste à grouper tous les concepts fondamentaux autour de la notion primitive du *groupe des mouvements* et non plus seulement du *groupe des déplacements*, comme dans la géométrie.

C'est le *groupe de Galilée* dans la mécanique classique, et le *groupe de Lorentz* dans la mécanique relativiste.

Résumant le très bref parallèle que nous venons d'esquisser entre la géométrie et la physique — plus spécialement la mécanique — nous pouvons affirmer ce qui suit :

*Il n'y a point de différence de principe dans le rôle que jouent les concepts fondamentaux et les relations primitives ou axiomes dans la géométrie et dans la physique.*

Seulement il y a en physique des circonstances qui jouent le rôle de verre grossissant et qui font apparaître avec toute la netteté désirable certains aspects de la méthode axiomatique que notre longue pratique de la géométrie a presque effacés devant notre esprit. Le seul fait d'avoir délibérément franchi le seuil qui sépare la géométrie des autres théories mathématiques de l'espace, suffira pour leur rendre leur relief.

Ce premier point étant établi, je vous prie d'examiner maintenant cette autre question très simple: *Quelle signification conférons-nous au mot d'axiome ?*

Il nous arrive de donner de l'axiome la définition que voici: « *L'axiome est une vérité évidente par elle-même.* » Cette définition représente un assez curieux anachronisme, car elle ne reprend son sens véritable que si on la replace dans son cadre naturel, qui est la philosophie platonicienne. Je n'ai pas besoin de vous rappeler que, pour les philosophes et mathématiciens grecs, la perfection de l'être et l'absolu dans la vérité trouvaient leur réalisation dans le monde des Idées. En dehors, et au-dessus des contingences du réel, le vrai y trouvait sa forme et son expression. La vérité d'une idée n'était pas la conséquence d'une adéquation, d'une conformité au réel du monde physique. Cette vérité se

réalisait pour elle-même dans une sphère plus élevée que celle des simples réalités. C'est au contraire par sa conformité plus ou moins parfaite aux idées que le monde devenait intelligible.

L'évidence de l'axiome était donc pour les Grecs conséquence et fonction de sa vérité. C'était une idée accessible sans détour à l'esprit éclairé du philosophe.

Nous avons presque tous abandonné cette façon de voir : mais il n'en est pas moins vrai qu'en donnant de l'axiome la définition que je viens de dire, nous parlons comme si nous concevions encore la réalité péremptoire et suprasensible du monde des Idées.

(Et il n'en est pas autrement lorsque nous parlons de la vérité dans un sens absolu, de la Vérité avec un grand V.)

Ainsi donc la définition que je viens d'analyser n'a plus de sens pour nous (ou du moins je ne vois pas comment on peut lui en conférer un en dehors des conceptions de la philosophie platonicienne).

Devant cette constatation, nous sommes amenés à nous demander s'il existe un cadre de doctrines, un système philosophique où la notion d'axiome puisse être explicitée. Passons sur Aristote et la scolastique, et arrêtons-nous un instant au système de Kant.

Dans le système de Kant, notre raison ne découvre plus des idées vraies, mais porte des jugements sur le monde extérieur et sur nous-mêmes. Or l'impérissable mérite de Kant est d'avoir découvert que dans les jugements que nous portons, par exemple, sur le monde physique il y a certains caractères qui forment comme un apport de notre esprit.

Par exemple on ne doit pas dire que l'univers est, en soi, en dehors de la connaissance que nous en avons, étendu selon trois dimensions. L'ordre spatial est *notre* façon de concevoir le monde. Cet ordre est *a priori*. Cela veut dire que toute sensation qui pourra se présenter à notre faculté de connaître sera interprétée dans cet ordre, en fonction de ce schéma préexistant.

Pour employer un langage inexact, mais commode, l'espace est une matière intellectuelle donnée *a priori*, avec laquelle nous formons nos représentations de la réalité.

Comment la géométrie est-elle possible, dans ces conditions ?

Voici la réponse de Kant: Si vous soumettez cette matière intellectuelle à la pression de la logique, elle prendra la forme de la géométrie (plus précisément encore de la géométrie euclidienne).

Il est inutile de nous arrêter aux autres ordres fondamentaux à-priori qui, à côté de l'espace et du temps, nous permettent, selon Kant, de concevoir et de juger.

Que devient l'axiome, dans ce système ?

L'axiome est un jugement *a priori*; un de ces jugements qui doit être en notre possession en dehors du monde physique, non pas comme expression d'une vérité existant en dehors de nous, mais comme une nécessité inhérente à notre façon de connaître.

*L'axiome est un jugement dans lequel s'exprime une nécessité a priori de notre raison, une nécessité précédant et pour une part donnant sa forme à la connaissance.*

Il y a entre cette explication de l'axiome, qui ne prend sa signification que dans le système de Kant, et celle que nous avons analysée il y a un instant, et dont le sens ne peut être saisi que par rapport avec la philosophie platonicienne, un abîme évident.

Il y a toutefois un caractère qui leur est commun, c'est que jamais l'expérience ne pourra les contredire.

Pour les Grecs, la réalité de l'axiome participant de celle de la Vérité est d'une essence supérieure à celle du monde des sens. Il n'est pas concevable que cette dernière puisse porter atteinte à la première.

Pour Kant toute expérience doit, avant de devenir connaissance, recevoir l'empreinte, prendre l'aspect conforme à l'axiome *a priori*. Il ne pourra par conséquent jamais se produire de conflit.

Nous plaçons-nous au point de vue de Kant, lorsque nous cherchons à réaliser la signification du mot axiome ? Je n'oserais guère le prétendre. Et d'ailleurs... Mais faisons une expérience !

Examinons l'axiome de la simultanéité, de la mécanique classique:

*Deux événements simultanés pour un premier observateur sont aussi simultanés pour tout autre observateur.*

Ai-je le droit, en me plaçant soit au point de vue de la philosophie grecque, soit au point de vue kantien de prétendre que j'ai bien là un axiome ? Oui ! Car je n'ai qu'à me réclamer du sentiment de l'évidence, — qui est d'une force incoercible tant qu'il n'a pas été heurté et détruit par la cinématique relativiste.

Vous connaissez tous l'importance de cet axiome, et vous savez aussi que la théorie de la relativité ne l'accepte pas. Vous savez aussi quelles critiques passionnées cet abandon a soulevées : toutes ces critiques s'inspirent du sentiment de l'évidence, *et de la nécessité de l'axiome en question.*

Or il arrive ce fait impressionnant : Que l'expérience semble donner raison aux relativistes. De plus en plus les faits s'accumulent, qui semblent confirmer les vues d'Einstein. Je n'en veux pour exemple que les derniers progrès de la théorie des quanta.

Mais ceci est un fait extrêmement grave : *car l'expérience nous jette ainsi en dehors de l'évidence.* Ceci suffit pour rendre intenable aussi bien le point de vue de Kant que celui des Grecs. Nous l'avons déjà expliqué tout à l'heure. Pour les Grecs, la réalité physique n'est pas d'une essence telle qu'elle puisse infirmer un axiome, ce dernier étant vrai comme une idée. Et pour Kant le conflit de l'expérience avec un jugement *a priori* devant simplement rendre la connaissance impossible.

Mais il y a un exemple encore plus frappant : c'est le concept fondamental de grandeur physique proposé par Weyl, et qui est peut-être appelé à rendre de grands services dans la théorie de la matière. Je me contente de l'exprimer dans le cas particulier de la quantité de mouvement d'un électron, mesurée d'ailleurs selon des unités dont il est inutile de parler :

« *La quantité de mouvement est une grandeur à trois composantes, dont chacune peut prendre seulement la valeur  $+ 1$  ou la valeur  $- 1$ , avec une probabilité variable selon les cas.*

Ce concept fondamental axiomatiquement accepté dans la théorie de Weyl dont je parle est en complet désaccord avec notre représentation intuitive du réel. Il n'y a rien, dans notre intuition du monde, qui puisse le soutenir. Et pourtant il est suggéré par l'expérience, et c'est cet axiome qui peut-être nous conduira à une conception du monde atomique qui ne mette plus la logique et l'expérience en contradiction.

La conclusion à tirer de ces exemples est la suivante: Le rôle que joue l'axiome dans les sciences physiques actuelles rend tout à fait évidente l'insuffisance de la base philosophique que peut offrir l'un ou l'autre des deux systèmes que nous avons évoqués.

Les philosophes ont-ils, depuis Kant, mis au point une autre théorie de la connaissance, où la méthode axiomatique telle que nous l'employons prenne place comme la mathématique pure le faisait dans le système kantien; où ses rapports avec le problème de la connaissance en général soient analysés et précisés? Je crois pouvoir prétendre que cela n'est pas.

La philosophie n'a pas, vis-à-vis des fondements des sciences modernes, réalisé une mise au point comparable aux deux grandes tentatives auxquelles nous nous sommes arrêtés un instant, et qui au moment où elles ont vu le jour portèrent l'analyse de notre faculté de connaître à la hauteur et peut-être au-delà des connaissances acquises.

On peut dire aujourd'hui qu'une des formes de la connaissance s'est révélée — et j'ai spécialement en vue la méthode axiomatique, qui pour moi se confond en essence avec la méthode mathématique — et que notre prise de connaissance du monde s'est engagée dans des voies, qui ne peuvent être explicitées dans le cadre d'aucun système philosophique. Le sens de cette méthode ne peut être exprimé que par la description de ses buts et de ses moyens... (J'espère, en parlant aussi résolument, ne pas être injuste envers les efforts et les résultats dignes d'admiration des Meyerson, Brunswick, Reichenbach, etc...)

Pouvons-nous imaginer dans quel esprit et dans quelle direction une mise au point de ce genre peut être tentée? La réponse est donnée par l'esprit même de la méthode de Kant, par exemple. Lorsque Kant posait la question: «*Wie ist reine Mathematik möglich*», cela ne signifiait pas qu'il allait déduire de certains principes absolus la justification de la mathématique pure, qu'il allait lui donner la «*permission d'exister*». Mais cela signifiait qu'il allait rechercher, dans notre nature et dans la Nature, les caractères compatibles avec l'existence des jugements mathématiques. Ce n'est donc pas les mathématiques qui finalement se trouveront éclaircies jusque dans leurs fondements ultimes. Partant au contraire *de ce fait que les mathématiques sont,*



on en tirera des conditions à remplir et à satisfaire par notre faculté de connaître.

Une des caractéristiques d'un effort de ce genre, ce n'est donc pas de constituer une métaphysique, dont on pourra déduire le physique, le réel. C'est de rechercher ce qui, dans notre esprit, rend notre jugement conforme au réel; quel est le mécanisme, quels sont les rouages qui finalement nous permettent sinon de saisir tout le réel, du moins d'en saisir une part, un aspect... C'est au fond une solution de ce problème que donnaient les Grecs, par leur monde où régnait sans conteste la Vérité; que proposait Kant par ses idées *a priori*, innées et conditionnant notre perception du réel. C'est une solution de ce problème qui, pour l'état actuel de la science, fait encore défaut.

Pour rester fidèle à l'esprit même de la tentative, il faut partir de ce que nous faisons, de ce que nous pouvons; il faut se porter à la limite, à la pointe de ce *qui se fait*. C'est justement en physique théorique qu'il faut aller voir comment l'esprit s'y prend pour réaliser l'harmonie de son activité propre avec la manière d'être du monde physique. Mais il ne faut pas y aller pour juger en fonction de ce qui s'est passé jusqu'à maintenant. Car on se mettrait d'emblée en désaccord avec l'esprit de l'entreprise qu'on veut tenter; on se mettrait dans une position philosophique fautive par définition, position qui conduit à nier ce qui se fait et à ne pas reconnaître ce qui déjà s'est accompli. Il ne faut pas y aller pour rééditer les arguments des sophistes qui niaient la possibilité du passage de l'état de repos à l'état de mouvement, parce que leur langage ne permettait pas de l'expliquer sans contradiction, *parce que ce fait ne pouvait pas s'explicitier sur la base de leur système philosophique*.

La seule position philosophique *juste* est donc de partir de ce qui est, et de se demander comment il est possible que cela soit. Or ce qui est, ce qui est sorti des limbes de l'indéterminé pour être c'est la méthode axiomatique. Le premier acte nécessaire est donc d'examiner *comment* l'axiomatique est; de la décrire comme on décrit un phénomène nouveau; d'en prendre acte et connaissance.

Autant le mot d'axiome est vieux, autant la méthode axiomatique est nouvelle. On peut en voir l'origine dans les premiers

essais de Pasch pour donner le système complet des axiomes nécessaires à l'édification de la géométrie, dans ceux de Peano pour l'axiomatisation de l'arithmétique. Mais elle doit une bonne partie de son importance aux recherches et aux travaux de Hilbert, qu'on a nommé avec autant de raison que d'injustice vis-à-vis de ses prédécesseurs, l'Euclide des temps modernes. Ces travaux sont d'une part consignés dans les « Grundlagen der Geometrie », ce sont d'autre part d'importantes contributions à la théorie générale de la relativité et enfin ses dernières tentatives « Zur Begründung der Mathematik », où il s'efforce d'assurer à jamais les bases de la science mathématique, tentative grandiose et problématique.

Mais les constructions axiomatiques seraient peut-être restées encore longtemps une spécialité de mathématicien, sans le choc intellectuel produit par les théories relativistes. Déjà la théorie de la relativité restreinte posait à nouveau le problème du temps et du mouvement, exigeait un remaniement des notions acquises et rendait nécessaire un nouvel examen des modes selon lesquels les concepts mathématiques trouvaient leur réalisation dans le monde physique.

Ce mouvement d'idées, qui s'est magnifiquement amplifié par la suite est loin d'être arrivé au repos, et le développement de la mécanique atomique semble devoir lui fournir l'occasion d'un nouveau rebondissement.

... Reprenons l'axiome de Weyl qui nous a déjà occupés il y a un instant :

*La grandeur physique est une grandeur mathématique, dont chaque composante ne peut prendre qu'un système déterminé de valeurs avec une probabilité variable selon les cas.*

Est-ce que c'est là la façon dont le physicien expérimentateur se représente la matière ? Nullement. Est-ce que cet axiome décrit véritablement avec fidélité un électron par exemple, ou tout autre système matériel existant dans le réel ? Aucunement. L'axiome n'est pas une description fidèle du réel.

Mais est-ce une pure fiction ? Une création véritablement libre de notre esprit, une fantaisie de notre imagination ? Certainement pas. Nous avons imaginé l'axiome sous la pression du réel. Ce dernier est tel qu'il corresponde d'une certaine façon au réel ;

la définition mathématique reproduit un certain aspect du réel. Si vous me demandez de préciser, de dire mieux, d'expliquer à fond de quelle façon cette correspondance s'établit, je vous répondrai que je n'ai que le mot *correspondance axiomatique* à ma disposition. Je n'ai pas la possibilité de l'explicitier en fonction d'une théorie de la connaissance qui le relierait à tous les autres ordres de la connaissance. Cette correspondance est définie pour nous mathématiciens parce que nous l'avons réalisée dans la pratique de notre science.

L'axiome est donc à mi-chemin entre la fiction et la description du réel. Il participe de nous, parce qu'il schématise; il participe du réel parce qu'il le recherche .

Voici donc ce qui est: *C'est que l'esprit humain peut prendre une position intermédiaire, médiatrice entre la liberté du rêve, et l'absolue détermination de la chose en soi.*

Bien plus, ce qui est, c'est que l'esprit humain ne peut prendre que cette position, qu'il n'est capable que de jugements de ce genre. Que par conséquent les concepts de liberté, d'absolu, de détermination, etc., ne sont eux-mêmes que des concepts limites, dont le sens n'est qu'axiomatiquement fixé. C'est d'ailleurs bien en conformité avec le rôle général du langage, tant que la signification n'en est pas tendue à l'extrême et parfois au delà du possible comme dans la spéculation philosophique.

Pour ne pas rester dans les généralités, je m'en vais dire un mot de la façon dont l'axiomatique procède:

Toute démarche axiomatique comprend deux actes plus ou moins simultanés et indissolublement liés de l'esprit.

a) On accepte certains concepts fondamentaux et certaines relations purement logiques entre ceux-ci. Ces concepts n'ont d'autre signification que celle que leur confère leur rôle dans la trame logique ainsi établie.

b) Ces concepts et ses relations sont projetées dans le réel, identifiés avec certains aspects que nous percevons du monde physique ou du monde de nos pensées. Du monde physique dans les sciences physiques avant tout, du monde de nos pensées dans la partie la plus abstraite de la théorie de l'infini, etc...

C'est une erreur à mon avis de croire que ces deux actes de l'esprit puissent être véritablement dissociés; ils se conditionnent



l'un l'autre et s'appuient l'un sur l'autre. Cette façon de faire est à la base même de tout le système qui applique les mathématiques à la recherche du réel; je dirai plus: qui applique la logique à la *déduction* du réel.

Cette application est en principe extrêmement précaire. L'expérience peut rejeter constamment l'esprit en dehors des positions qu'il a prises un instant — même si cet instant devait signifier quelques siècles. C'est là l'événement important, car à chaque fois l'esprit doit se recréer une nouvelle réalité... tandis que tout un système philosophique s'effondre. C'est là l'événement qui s'est produit, lorsque d'intolérables contradictions dans la théorie de la lumière obligèrent les physiciens à recourir au nouveau schéma de la relativité.

Nous allons passer maintenant à l'examen de la question fondamentale de l'axiomatique: *Comment est-il possible que les conséquences logiques des axiomes ne soient jamais en contradiction les unes avec les autres ?*

Tout d'abord il faut remarquer qu'il n'est pas vrai qu'un système d'axiomes acceptés en toute sincérité ne puisse jamais conduire à une contradiction. La logique nous a au contraire fourni un exemple où les contradictions peuvent se produire si l'on s'en tient avec rigueur à un certain système d'axiomes. Ces contradictions, connues sous le nom d'antinomies, qui se retrouvent aussi aux dernières limites de la théorie des ensembles de Cantor, n'avaient pas été sans inquiéter quelques mathématiciens. Mais le sentiment du danger s'était assoupi, lorsque, dans ces dernières années, MM. Brouwer et Weyl soulevèrent de nouveau la question sous des formes en partie nouvelles. Il ne vous est pas inconnu que la conclusion de MM. Brouwer et Weyl est la suivante: la logique ordinaire ne peut s'appliquer, sans danger, qu'aux ensembles donnés comme l'est un ensemble fini. C'est pour répondre à cette thèse *intuitionniste*, comme on l'a appelée, que M. Hilbert a entrepris de *démontrer* l'absence nécessaire de contradiction entre les conséquences logiques des axiomes de la logique et des mathématiques.

Il n'est pas dans mes intentions de discuter ici à fond la tentative de M. Hilbert. Je n'en dirai que deux mots. Hilbert rem-

place tout ce qui est démonstration mathématique par une série de symboles, admet qu'il ne rencontrera jamais de contradictions effectives en raisonnant sur ces symboles. Ses raisonnements aboutissent alors à une contradiction effective s'il admet que dans la collection des formules où il a symbolisé les mathématiques il se trouve la formule de la contradiction

$$1 = 0 .$$

Cette théorie est fort intéressante, et dans le différend qui oppose Hilbert aux intuitionnistes, il semble que beaucoup soient sensibles à la légitime autorité qui s'attache au nom de M. Hilbert. Pourtant je n'hésite pas à déclarer que je ne puis m'y rallier, aussi peu d'ailleurs qu'à la thèse des intuitionnistes. Cette théorie de la démonstration et le rôle qu'y jouent les axiomes ne sont pas conformes à la méthode axiomatique telle que je viens de l'évoquer.

Les axiomes-formules, lorsqu'ils y doivent être représentés par des symboles, doivent être complètement dépouillés de leur contenu intuitif. Il ne doit rester d'eux que ce qui est purement logique. Par contre, lorsqu'il s'agit de raisonner sur ces formules, il est permis d'invoquer le sentiment de l'évidence intuitive. Des deux actes de la pensée que j'ai présentés tout à l'heure comme simultanés et liés dans toute démarche axiomatique, on doit donc supposer tout d'abord que l'un d'eux a pu être complètement éliminé. Mais ensuite on renonce simplement à toute axiomatisation et l'on accepte comme irrévocables et irrécusables les jugements du bon sens.

Je ne puis me défendre de l'impression que cette façon de procéder n'effleure que d'assez loin la question que j'ai dite fondamentale: *Comment est-il possible que les conséquences des systèmes d'axiomes de l'arithmétique et de la géométrie par exemple ne soient jamais contradictoires ?* Il me paraît d'abord nécessaire de comprendre quelle est la valeur, l'efficacité d'une déduction logique, en ces matières. Longtemps l'ensemble des mathématiques a été considéré comme un ensemble de Vérités. J'ai déjà dit que cette phrase ne prend de sens, comme le concept de Vérité en soi, que dans le cadre d'un système philosophique

comme le système platonicien. L'axiomatisation croissante des sciences physiques — c'est là justement ce que je viens de chercher à montrer — a ruiné cette façon de voir. Mais les opérations de la logique sont encore considérées par la grande majorité des mathématiciens et des philosophes sous l'angle de l'absolu. J'imagine volontiers que beaucoup souscriraient sans peine à une affirmation comme celle-ci: « La logique est un instrument intellectuel d'une pureté absolue, d'une infaillibilité dont les raisons profondes ne sont pas à la portée de notre compréhension. Cet instrument nous a été donné pour décider sans conteste si quelque chose est ou n'est pas, si un jugement est vrai ou s'il est faux. Elle est le fondement absolu de toute notre connaissance. »

Je ne veux pas insister encore une fois sur le fait que les concepts de vrai et de faux ou bien sont relatifs à un système ou bien ne prennent leur vrai sens que par le rôle qu'ils jouent. J'ai déjà dit trop souvent que la première hypothèse ne me paraît plus acceptable. Quant à la seconde... Eh bien ! dans la seconde hypothèse il faudrait examiner un peu toutes les circonstances qui accompagnent le jeu des opérations logiques; et nous ne pouvons nous soustraire complètement à cette obligation. Cela revient au fond à poser la question, imitée encore une fois de Kant:

*Comment la logique est-elle possible ?*

Sincèrement je ne comprends quel sentiment s'est entremis pour empêcher que cette question soit posée et analysée de la même façon que cette autre:

*Comment la mathématique pure est-elle possible ?*

Si cette dernière est accessible, pourquoi la première ne l'est-elle pas ?

On peut voir en effet dans la logique la schématisation d'opérations d'une grande généralité que nous effectuons dans le réel. Toute la logique repose sur la possibilité de faire les distinctions suivantes: Ou bien tel objet fait partie de telle catégorie, ou bien il n'en fait pas partie; telle propriété est réalisée, ou bien elle ne l'est pas. Or des distinctions de ce genre, nous avons à les faire avant tout, et tous les jours, à propos de catégories données dans le réel.

Et quant à la règle du syllogisme

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \\ \hline A \rightarrow C \end{array}$$

qui peut s'énoncer,

*Si A est B et que B soit C, alors A est C.*

elle prend une allure bien moins abstraite si j'en fais l'application à des affirmations de ce genre :

Mon lit est dans ma chambre à coucher ; donc quand je suis dans mon lit je suis dans ma chambre à coucher.

Lorsqu'on a bien vu que toute la logique peut s'interpréter par des relations d'appartenance d'individus à des classes, ou de classes à d'autres classes ; et lorsqu'on réfléchit à ce fait que les propriétés de contenir ou d'être contenu sont à la fois les plus communes et les plus primitives que nous présente le monde physique, alors la question :

*Comment la logique est-elle possible ?*

commence à s'éclairer d'un jour nouveau.

Nos déductions logiques prennent l'aspect d'imitations schématiques de ces relations de contenant à contenu qui, de toutes parts et dans tous les ordres, caractérisent la façon d'être du réel. Vous voyez apparaître dès maintenant, et sans qu'il soit besoin d'y insister davantage, le visage axiomatique de ces règles abstraites : ce double visage qui à la fois regarde le réel et s'en détourne.

Vues sous cet angle les règles de la logique tombent du rang des abstractions les moins dépendantes des contingences à celui des démarches de l'esprit les plus fondées dans le réel, dont le contact avec le réel est le plus intime et le plus constant.

Le mystère de l'efficacité de nos déductions, lorsque nous les appliquons au monde physique, paraît un peu moins épais : nos déductions sont en correspondance axiomatique avec certaines réalités.

La réponse à notre question :

*Comment la logique est-elle possible ?*

ne paraît plus se perdre dans un lointain inaccessible. Une compréhension partielle ne paraît plus nécessairement impossible. Nous pouvons dire :

*Les règles de la logique peuvent être envisagées comme des codifications axiomatiques de certains aspects les plus primitifs du réel.*

Pourquoi est-elle efficace ?

*Parce que cette axiomatisation est en concordance avec les façons les plus générales d'être dans le monde physique.*

Le nom de logique aristotélicienne n'est-il d'ailleurs pas symbolique. Aristote, à qui l'on fait remonter le mérite d'avoir formulé les critères de la raison, ne peut-il pas être dénommé l'Empiriste, en face de son maître Platon l'Idéaliste. Et si dans ce que je viens de dire, je tenais à me réclamer d'un nom illustre, c'est à Aristote que je penserais tout d'abord qui, le premier, a fait entrevoir que le fondement de la philosophie c'est la recherche, la « *chasse* » du réel.

Il est bien clair que la réponse que nous venons de donner à notre question préliminaire et conforme à la tradition, n'est pas une explication qu'on puisse dire définitive. Elle est toute en fonction de la méthode axiomatique. Elle suppose le jeu de ces accords de l'esprit avec le réel, de ces imitations schématiques, de ces concordances qui font tout le contenu des formules et des symboles. Mais elle n'a pas donné le *pourquoi* de cette symbolisation, *pourquoi* qu'il est vain d'espérer. L'esprit ne cessera pas pour cela d'admirer quel est son pouvoir. Mais il n'en est pas moins vrai que notre réponse ramène le problème à l'échelle humaine, ou si l'on préfère à l'échelle biologique.

Ce progrès, si c'en est un, exige un renoncement assez pénible. Il était merveilleusement agréable et simple de pouvoir mettre sa confiance dans l'infailibilité nécessaire, *a priori*, de la logique. C'est en ce sentiment que se fonde une partie de notre sécurité intellectuelle. Et cette sécurité peut faire place au vertige si le fondement de notre raison ne doit plus être que l'ombre du réel. Mais la règle de toute marche en avant, dans le domaine de la connaissance, est bien le renoncement aux vues trop simples, trop grossièrement schématiques, le renoncement aux idées qui s'expriment en peu de mots et qui s'explicitent avec aisance.

Or, remarquez-vous cette chose admirable, que c'est là encore une fois la démarche axiomatique ? Où l'esprit passe de schéma en schéma qui tous commencent par le soutenir et finissent par l'emprisonner ; jusqu'au moment où la pression du réel l'oblige

à se délier et à rechercher les formules nouvelles dans lesquelles il pourra se reposer à nouveau.

Mais cette digression nous a éloignés de notre sujet. Il y a une question que nous avons posée, et qui attend toujours sa réponse: c'est celle de l'absence de contradiction entre les axiomes d'un système, par exemple entre les axiomes de la géométrie euclidienne.

Nous sommes maintenant en mesure d'y répondre dans le même esprit axiomatique que tout à l'heure:

*Les déductions logiques étant des imitations schématiques, axiomatiques de certaines façons d'être du réel; les axiomes étant également des schématisations de ce genre, l'absence de contradiction dans les conséquences est « en concordance » avec la faculté d'être, d'exister de certaines façons, et sous certains aspects, dans le réel.*

Une remarque nécessaire, c'est que le réel ne comprend pas uniquement ce qu'on est convenu d'appeler le monde physique: le réel embrasse aussi notre être, le monde physiologique, et notre pensée, le monde psychologique. *Ces différentes sphères du réel n'ont peut-être et probablement pas toujours et en tout les mêmes formes d'existence.* Le monde du rêve ne connaît pas le principe de contradiction. C'est pourquoi la logique d'Aristote n'est peut-être pas aussi conforme au réel psychologique qu'au réel du monde physique. A mesure que nous nous éloignons de ce dernier l'efficacité de la logique traditionnelle diminue. Et les antinomies dont nous avons déjà parlé nous révèlent que la spéculation mathématique s'est déjà trouvée engagée dans le champ où cette efficacité n'est plus.

S'il m'est permis de revenir sur la tentative de M. Hilbert que j'ai d'ailleurs imparfaitement expliquée, il me semble que nous sommes en mesure et en droit d'en apprécier la portée.

Si l'on accepte le point de vue que je viens d'exposer; si par conséquent on admet que c'est une concordance d'un certain ordre avec le réel qui fournit la garantie de l'absence de contradiction, on ne peut se défendre du sentiment que le but que se proposait M. Hilbert, c'est-à-dire d'assurer à jamais les fondements des mathématiques est encore pour longtemps, si ce n'est pour toujours hors d'atteinte. Les résultats que le grand axioma-



ticien allemand a obtenus sont précieux; mais le problème véritable reste entier.

Ici spécialement, nous aurions profit à mettre nos pas dans la trace de ceux de Kant. C'est lui qui nous a appris qu'on pouvait poser la question :

*Comment* la non-contradiction, la cohérence d'un système d'axiomes est-elle possible ?

et qui a montré ce que peut être la réponse à une question de ce genre. Or ce n'est pas le « comment » que la théorie hilbertienne prétend atteindre, mais le « pourquoi ». Une *démonstration* doit dire, en effet :

*Voici pourquoi* jamais une contradiction ne se produira.

La réponse : *Voici comment*..... comporte des vues sur la nature de notre esprit, sur les voies de notre connaissance, et ne sera jamais une démonstration mathématique. Or, nous l'avons déjà dit, nous ne connaissons pas les voies qui mènent aux « Pourquoi ».

Mais veuillez je vous prie considérer ces réflexions sur la théorie de la démonstration de M. Hilbert comme des remarques en passant. Ce n'est pas là l'objet véritable de notre discussion, et revenons à la méthode axiomatique.

Les quelques idées que je vous ai soumises provoquent très naturellement des objections assez nombreuses. Et je m'en vais en examiner quelques-unes avec vous.

Si la méthode axiomatique établit une certaine concordance entre nos imaginations et le réel, entre la géométrie et le monde physique, par exemple, comment expliquez-vous que l'espace mathématique soit, sans contradiction, conçu comme continu, tandis que la physique moderne évolue de plus en plus vers le discontinu dans la matière et l'énergie ?

L'objection est plus apparente que réelle. On pourrait y répondre tout d'abord, en éludant la difficulté, qu'il est vrai que la structure de la matière se révèle de plus en plus comme discontinue, mais que la nature n'exclut pas la possibilité du continu; et qu'à côté des spectres discontinus il y a les spectres continus; et que si par exemple la composante dans une direction de la quantité de mouvement d'un électron ne peut prendre exclusivement que les seules valeurs  $+ 1$  et  $- 1$ , il n'en est pas

moins vrai qu'il faut admettre la variation continue de la probabilité avec laquelle ces valeurs peuvent apparaître.

Mais on pourrait y répondre encore — et mieux —, que même si le monde physique n'admettait, ne réalisait que le discontinu, il ne s'en suivrait pas nécessairement que la géométrie du continu dût être contradictoire. Ce qui importe ici, ce sont les relations logiques établies entre les concepts fondamentaux et qui sont en concordance axiomatique avec certaines apparences du réel. Tant que ces relations logiques projetées, interprétées dans le réel ne restreignent pas le jeu naturel de ces apparences, peu importe qu'on n'ait pas saisi tout le réel. On en a saisi ce que j'ai déjà souvent appelé une façon d'être; et je ne vois pas de raison pour ne pas admettre que cela suffise à assurer la cohérence du système des images axiomatiques.

Voici une autre objection.

Mathématiquement parlant, la géométrie euclidienne et les géométries non-euclidiennes sont également exemptes de contradiction. Mais si l'une est en correspondance axiomatique avec *l'espace sensible*, les autres ne le sont pas. Ne devrait-il pas se produire que l'une seulement de ces formes géométriques ne soit pas contradictoire.

Cette objection semble porter assez juste à première vue; et pourtant il n'est pas difficile de lui enlever son venin. Il suffit de remarquer qu'il n'est pas nécessaire, pour qu'une géométrie soit non-contradictoire, qu'elle soit véritablement « *en concordance* » schématique avec une réalité physique. Même en admettant que la concordance imaginée dans un système ne résiste pas à la confrontation avec l'expérience on ne se trouve pas devant la nécessité d'admettre que le système d'axiomes doive être contradictoire.

En effet: il faut envisager encore une fois les seules relations logiques découlant du système. Et il suffit que ces relations logiques soient les mêmes que dans un autre système, qui celui-là soit bien « *en concordance* »: leur cohérence en sera assurée.

Or il est bien connu que toutes les géométries, qu'elles soient euclidiennes ou non-euclidiennes, ont la même trame logique; c'est-à-dire que toute relation de l'une peut être envisagée comme une relation de toute autre. Il suffit donc que l'une seule



d'entre elles soit « en concordance ». Et d'ailleurs, on pourrait contester encore qu'il ne puisse y en avoir jamais qu'une, qui soit « en concordance ». Mais ceci nous mènerait trop loin, et je préfère passer à une nouvelle objection.

— Comment expliquez-vous la non-contradiction des espaces à  $n$  dimensions.

On pourrait ici encore rester dans le monde physique. On sait bien qu'on obtient des espaces à plus de trois ou de quatre dimensions en interprétant comme des coordonnées les paramètres d'un système mécanique, à plus de trois ou de quatre degrés de liberté. En s'en tenant de nouveau aux relations logiques, on peut fort bien imaginer que les espaces à  $n$  dimensions soient, sinon en concordance axiomatique directe avec des systèmes physiquement possibles, du moins équivalents logiquement à des schémas en concordance manifeste.

Mais il peut paraître que ces explications prennent des chemins bien détournés, et qui ne répondent guère à la façon dont les êtres mathématiques en question ont été créés.

Il faut observer ici, et j'y insiste spécialement, que l'on n'est aucunement obligé d'imaginer toujours des concordances axiomatiques avec le monde physique. *Le réel doit être entendu dans un sens beaucoup plus large, et comporte divers « plans ».* Une fois les nombres conçus, par exemple, ils sont dans le réel. Et je pourrais invoquer des concordances axiomatiques — pourquoi n'en aurais-je pas le droit? — avec les façons d'être du système des nombres réels. J'obtiendrais ainsi une justification « *par intermédiaire* » des géométries à  $n$  dimensions.

Il y a même un cas où je me verrai bien obligé d'en venir là, et de renoncer au contact immédiat avec le monde physique: c'est quand on me demandera la justification de la cohérence de l'espace à infini dimensions de l'analyse fonctionnelle, ou bien quand il s'agira d'apprécier jusqu'à quel point les ensembles infinis sont soumis aux lois de la logique d'Aristote.

Je ne veux pas allonger outre mesure ces considérations très abstraites. Mais il me faut insister encore sur un dernier point — je le ferai très brièvement.

Les quelques observations que je vous ai présentées s'inspirent de la conviction que le succès des spéculations abstraites n'est

pas fondé sur la Vérité en soi des idées, ou sur l'infailibilité à-priori de la logique, mais sur l'existence d'un certain accord des démarches de notre esprit avec les possibilités du réel. Fidèle à cette idée, nous avons recherché les traces du réel et son intervention dans certains domaines de l'abstraction. Mais à côté du tableau que nous en avons tracé, il y a un tableau complémentaire dont nous n'avons encore à peu près rien dit. Nous avons en effet parlé du réel comme si nous savions parfaitement *ce que ce mot et tous ses synonymes signifient*. Or si le point de vue axiomatique conduit à retrouver l'empreinte du réel dans les idées abstraites, il ne doit pas perdre de vue que l'abstrait conditionne aussi notre conception du réel. Nous y avons insisté : le réel prend la figure du symbole.

Le concept même du réel, et les notions de toutes les choses réelles se constituent aussi selon la méthode axiomatique. Il s'en suit que toute notre connaissance est d'ordre axiomatique ; *tout notre être intellectuel est dans cette position de compromis entre le rêvé et le déterminé*.

C'est à cette seconde face de la question que je me suis spécialement attaché, dans une conférence faite à Berne avant les vacances, et à laquelle assistaient quelques-uns de mes auditeurs d'aujourd'hui.

---