

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Réflexions sur l'enseignement du Calcul infinitésimal.

A propos d'un article de M. DARESTE.

Dans le premier fascicule du tome 27 de *L'Enseignement Mathématique*, j'ai lu le très intéressant article de M. DARESTE (pp. 124-136), mais je regrette vivement de ne pouvoir admettre ses conclusions.

Je désire commencer en déclarant que j'ai la plus grande admiration pour le *Cours de Calcul infinitésimal* de HOÜEL: cet auteur est l'un des premiers qui m'aient fait aimer l'analyse mathématique. Mais, outre évidemment que l'ouvrage a beaucoup vieilli, je lui trouve un défaut prodigieux; je reste abasourdi du fait qu'aujourd'hui d'aucuns veulent en faire une qualité.

La question des infiniment petits semble être une des plus épineuses de toute l'analyse; elle intervient dans de multiples questions que l'on ne réussit pas sans peine à rendre cohérentes; nulle part on ne l'approfondit comme son importance devrait l'exiger. Cette question m'a longtemps obsédé; c'est l'une des raisons pour lesquelles j'ai toujours désiré d'écrire un *Traité d'analyse*; mais les circonstances ne m'ont permis de publier qu'un cours élémentaire, celui de l'Institut Polytechnique de Glons-Liège¹.

* * *

« L'infini mathématique n'est pas une quantité que l'on peut définir avec précision, dont une autre serait capable de s'approcher de plus en plus. Au lieu de dire qu'une grandeur EST infinie, on devrait d'ailleurs dire qu'elle DEVIENT infinie, pour rappeler le fait qu'elle change continuellement de valeur, qu'elle prend une suite indéfinie de valeurs plus grandes l'une que l'autre. L'infini mathématique est donc potentiel et non pas actuel; cette grandeur est si essentiellement variable et mobile qu'en la retranchant d'elle-même on n'obtient pas

¹ Un compte rendu de cet ouvrage a été publié dans *L'Enseignement Mathématique* (t. 26, 1927, p. 328).

nécessairement zéro; l'on sait, en effet, que $\infty - \infty$ est un symbole d'indétermination.

Les débutants auront à ne jamais perdre de vue qu'une quantité qui devient infinie peut prendre des valeurs immensément grandes. Si l'unité suivie d'un millier de zéros représente un grand nombre, la centième puissance de ce même nombre est autrement considérable (Cours, § 6.)

« En mathématiques, on appelle INFINIMENT PETIT toute quantité variable qui tend vers zéro. Non seulement il faut que cette quantité soit très petite, mais il est nécessaire qu'elle puisse devenir plus petite que tout ce que l'on veut. Quand une quantité variable tend vers une limite, la différence entre la quantité variable et sa limite est donc un infiniment petit. Le terme général d'une série convergente est encore un infiniment petit. Nous mettons les débutants en garde contre une fâcheuse confusion qu'ils pourraient faire, et qui provient de ce qu'en littérature on donne à cette association de mots *infiniment petit* une tout autre acception; c'est couramment que des hommes de lettres appellent les microbes des êtres vivants infiniment petits, alors qu'ils devraient employer l'expression *extrêmement* petits, ou bien *excessivement* petits (s'ils voulaient formuler un regret, par exemple celui de ne pas les voir aisément).

Il est tout à fait regrettable que cette conception fautive ait influencé, qu'elle influence encore certains mathématiciens qui donnent des infiniment petits l'inexacte définition que voici: pour eux tout infiniment petit est une quantité moindre que toute quantité donnée; d'aucuns vont jusqu'à dire: un infiniment petit est tellement petit qu'on ne peut plus imaginer un nombre plus petit! Tout cela n'est qu'un charabia que l'on ne peut admettre quand on réfléchit un moment aux notions de limite et de continuité. Ce qu'il faut dire expressément, c'est qu'un infiniment petit doit pouvoir DEVENIR, en valeur absolue, moindre que n'importe quoi. » (*Loc. cit.*, § 39.)

L'on retrouve d'ailleurs cette idée dans la classification des infiniment petits et dans la théorie du contact des figures géométriques. Soient deux courbes planes tangentes en un certain point; supposons le contact d'ordre n . Par le point de contact menons une droite, quelconque, mais qui ne soit pas la tangente commune. Si la droite subit une translation h , petite ou très petite, les deux courbes détermineront sur elle un petit ou très petit segment M_2M_1 . Supposons alors que la distance h DEVIENNE k fois plus petite exactement; le segment M_2M_1 DEVIENDRA k^{n+1} fois plus petit, mais à peu près seulement; cet à peu près manque de rigueur; la théorie des limites permet de définir l'ordre d'un infiniment petit d'une manière tout à fait irréprochable. Mais la propriété que nous avons indiquée, nous paraît merveilleusement propre, au point de vue intuitif, à préciser la notion de l'ordre d'un infiniment petit (40, 103, 143, 187, 192). En tout cas l'infiniment petit mathématique nous apparaît ici comme essentiellement variable.

Comparer deux infiniment petits, c'est comparer les manières dont ils tendent vers zéro (40). Vouloir évaluer ou fixer un infiniment petit, c'est ne pas en avoir compris la nature. Il est donc ridicule de vouloir établir une confusion entre *infiniment petit* et *très petit*.

Des confusions du même genre se sont présentées à propos du fameux problème des tangentes (50). La tangente est la limite d'une sécante mobile; celle-ci rencontre la courbe en deux points infiniment voisins, ce qui veut dire tout autre chose qu'en deux points très voisins. L'idée est complexe et peut se résumer comme il suit: quand les deux points d'intersection *se rapprochent*, la sécante *tend à se confondre* avec la tangente. Ici nous apercevons clairement une faiblesse de l'esprit humain: nous concevons la tangente avec une lumineuse clarté, mais nous nous sentons incapables de la définir directement; nous sommes obligés de passer par l'intermédiaire de la sécante. Certains esprits ne comprennent pas le mécanisme de cette opération psychologique; ils conçoivent la monstruosité que tout le monde connaît: les deux points d'intersection de la sécante se rapprochent jusqu'à venir se placer gentiment l'un à côté de l'autre; la courbe et la tangente auraient deux points consécutifs communs.

« Si l'on veut bien se rappeler qu'un point géométrique n'a pas de dimension, que c'est un espace à zéro dimension, l'on devra reconnaître que les deux mots *points consécutifs* jurent entre eux dès qu'on les assemble. Deux points distincts délimitent un segment qui possède un point milieu. Quand deux points se rapprochent, leur distance est infiniment petite et peut *devenir* aussi petite qu'on le veut. » (50)

Les esprits dont nous venons de parler conçoivent une ligne comme un assemblage de points, de même que le chimiste conçoit la matière comme une collection d'atomes. Différents savants, parmi lesquels M. Jean Perrin, ont démontré que les atomes existent réellement, puis ils en ont déterminé les poids absolus. Les atomes sont très petits, mais non pas infiniment petits. Les tenants de la *géométrie atomique* doivent se faire une singulière idée de la continuité! (103, 131, 151.)

La tangente est donc une limite, comme la dérivée en est une aussi. L'on a:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} ;$$

on a (100)

$$dx = \Delta x ,$$

mais (103)

$$dy \neq \Delta y$$

à moins que y ne soit une fonction linéaire de la variable x . Hoüel a donc grandement tort de confondre une différentielle avec une variation.

Au début du calcul différentiel on représente par Δx la variation

tout à fait arbitraire que subit la variable indépendante; cette notation nouvelle est conséquemment équivalente au h de la formule de Taylor; et l'on propose les définitions que voici (100):

$$dy = y \cdot \Delta x \quad d^n y = y^{(n)} \cdot \Delta x^n ,$$

grâce auxquelles on passe automatiquement des dérivées aux différentielles correspondantes, ou vice-versa. « Il semble donc que le calcul différentiel soit tout à fait équivalent à celui des dérivées. Mais cette manière d'appréciation est superficielle, ainsi que le paragraphe suivant va nous en convaincre » (105).

On sait que l'on trouve tout de suite

$$dx = \Delta x ;$$

il en résulte

$$dy = y' dx ;$$

et cette formule, que l'on vient d'établir en supposant que x joue le rôle de variable indépendante, reste vraie même si l'on prend comme variable indépendante une grandeur autre que x (106). M. DERUYTS, professeur à l'Université de Liège, appelle cette proposition *la règle de permanence* (cf. de la VALLÉE-POUSSIN, *Cours d'Analyse infinitésimale*, t. I, 6^{me} éd., 1926, p. 56, V). Cette règle constitue, *au point de vue théorique*, le principal avantage du calcul différentiel sur le calcul des dérivées (106): « Si l'on étudie une question qui fait intervenir plusieurs fonctions d'une même variable indépendante, on n'a nullement besoin, pour calculer une différentielle, de savoir quelle est la variable qu'on a prise pour variable indépendante. » Et cette règle s'étend aux cas d'un nombre quelconque de variables indépendantes (99, 111; cf. de la VALLÉE-POUSSIN, *loc. cit.*, p. 122).

« Pour LEIBNIZ, la différentielle dx était une quantité quelconque; mais ses continuateurs immédiats, parmi lesquels on doit citer en toute première ligne les frères Jacques et Jean BERNOULLI et le Marquis de L'HOSPITAL, développèrent une autre conception dont la fortune fut considérable, mais qui provoqua d'étranges discussions (102). C'est la proposition d'envisager les différentielles comme des infiniment petits. Mais alors (107), la différentielle d'une différentielle est-elle une différentielle seconde? C'est ce qu'admettent la plupart des auteurs. (Cf. notamment: de la VALLÉE-POUSSIN, *loc. cit.*, pp. 71-72 Ed. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. I, 4^{me} éd., 1924, p. 50). On connaît le raisonnement; il est classique. Il est cependant très drôle, car (107), il nous amène à résumer comme il suit le calcul différentiel:

1^o Les infiniments petits sont des quantités essentiellement variables;

2^o Les différentielles sont des infiniment petits;

3^o L'on posera $dx = \text{constante}$.

« La troisième proposition jure évidemment avec les deux autres. Pour tourner la difficulté, d'aucuns auraient voulu que dx fût un pseudo-infiniment petit, c'est-à-dire une constante inférieure à n'importe quel infiniment petit; or, les mêmes auteurs, désireux d'insister sur le 1^o, font observer qu'une constante infiniment petite est rigoureusement nulle. »

La méthode classique revient donc à fixer l'infiniment petit dx ; ceux qui la pratiquent, commettent par conséquent l'erreur que commet l'Abbé MOREUX, d'après ce que nous confie M. DARESTE (*L'Ens. Math.*, p. 128). Ces mathématiciens n'ont pas compris que, par nature et par définition, l'infiniment petit dx est essentiellement variable.

Alors ? Ici deux voies s'offrent à nous.

La première est apparemment la plus simple. On dira que notre dx n'est absolument rien d'autre que la variation h de la formule de Taylor. Quand on démontre cette formule, on considère tout naturellement h comme une constante. Et dans ces conditions, pourquoi faire tant de bruit ? Nous répondrons d'abord que ce n'est pas nous qui faisons tout ce bruit que nous regrettons beaucoup; ensuite cette méthode par trop simpliste amène l'étrange contradiction que l'on vient de signaler.

M. Jacques DERUYTS trouva la solution qui nous semble la bonne, et qui constitue en tout cas un chef-d'œuvre de logique mathématique (108, 113). Voici comment on peut résumer cette solution.

On suppose la quantité $dx = \Delta x$ entièrement quelconque. On considère l'expression

$$dy = y' \cdot dx$$

comme un produit; par application de la règle de différentiation d'un produit l'on obtient tout de suite

$$d(dy) = d^2y + y' \cdot d(dx) ; \quad (F)$$

donc (107) « la différentielle de la différentielle première n'est ordinairement pas égale à la différentielle seconde ». On trouve aussi

$$d(d^n y) = d^{n+1} y + n y^{(n)} \cdot dx^{n-1} \cdot d(dx) .$$

Afin de bien faire comprendre le merveilleux principe de notre maître, nous commencerons par développer deux exemples.

A. — Employons les coordonnées polaires (108) et choisissons l'angle ω comme variable indépendante. Pour une fonction quelconque u nous pourrions écrire une formule analogue à (F):

$$d(du) = d^2u + u' \cdot d(d\omega) . \quad (C)$$

Différentions une première fois la relation

$$x = r \cdot \cos \omega ;$$

il vient

$$dx = \cos \omega \cdot dr - r \cdot \sin \omega \cdot d\omega ; \quad (A)$$

il en résulte

$$x' = r' \cdot \cos \omega - r \cdot \sin \omega . \quad (A')$$

Différentions (A), mais en tenant compte des relations (C, A'); on obtient

$$\left. \begin{aligned} & d^2x + (r' \cdot \cos \omega - r \cdot \sin \omega) \cdot d(d\omega) \\ &= \cos \omega \cdot [d^2r + r' \cdot d(d\omega)] - 2 \sin \omega \cdot dr \cdot d\omega \\ &\quad - r \cdot \cos \omega \cdot d\omega^2 - r \cdot \sin \omega \cdot d(d\omega) . \end{aligned} \right\} \quad (R)$$

Les termes en $d(d\omega)$ sont identiquement les mêmes dans les deux membres, et s'en vont par simple réduction. Supprimons-les, et nous obtiendrons la même formule à laquelle conduirait la méthode stupide consacrée par l'usage. La formule

$$d^2x = \cos \omega \, d^2r - 2 \sin \omega \, dr \, d\omega - r \cos \omega \, d\omega^2$$

serait encore vraie si l'on prenait pour $d\omega$ n'importe quelle fonction de ω , fût-elle même infiniment grande.

La méthode de M. DERUYTS présente le double avantage d'être beaucoup plus générale que la méthode classique et d'éviter la fameuse contradiction.

B. — Proposons-nous (109) de différentier l'équation fondamentale

$$y' = \frac{dy}{dx} ,$$

dans l'hypothèse où l'on prendrait pour variable indépendante une variable t tout à fait quelconque. La formule (C) du numéro précédent s'écrit alors

$$d(du) = d^2u + u'_t \cdot d(dt) .$$

L'on a donc

$$d(y') = \frac{dx \cdot d(dy) - dy \cdot d(dx)}{dx^2} ,$$

c'est-à-dire

$$y''(dx) = \frac{dx \{ d^2y + y'_t \cdot d(dt) \} - dy \{ d^2x + x'_t \cdot d(dt) \}}{dx^2} ;$$

au numérateur, le coefficient de $d(dt)$ est

$$y'_t \cdot dx - x'_t \cdot dy = y'_t \times x'_t dt - x'_t \times y'_t dt = 0 .$$

En effet, l'on a

$$dx = x'_t \cdot dt ,$$

comme cela résulte de la règle de permanence. Il vient donc enfin

$$y'' = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3} .$$

La méthode classique aurait donné le même résultat.

La méthode classique supprime, sans autre forme de procès, chaque terme renfermant $d(dt)$; pour ce faire, elle avance une hypothèse qui n'est qu'une contradiction. M. Deruyts montre l'inutilité de cette absurde hypothèse: la somme de tous les termes en $d(dt)$ sera nulle, quelque valeur (constante ou non) que l'on attribue à dt .

M. Deruyts démontre son principe en toute généralité par la méthode élémentaire des coefficients indéterminés. Toute relation telle que (R) peut s'écrire

$$M + N \cdot d(d\omega) = 0 ;$$

elle doit rester vraie quelle que soit la grandeur $d\omega$; mais si celle-ci devenait constante, la relation se réduirait à

$$M = 0 ;$$

donc il en résulte aussi

$$N = 0 .$$

c. q. f. d.

Les tenants de la géométrie atomique vont recommencer la discussion. Pour eux, le pseudo-infiniment petit dx sera, sur l'axe des x , la distance de deux points consécutifs. Et ds deviendra l'hypoténuse du triangle rectangle que tout le monde connaît. Il en va résulter une autre contradiction.

En effet. Nous croyons pouvoir nous arroger le droit de considérer le plan comme entièrement homogène. Sur la courbe étudiée prenons alors (:) deux points consécutifs dont la distance ds est un certain minimum caractéristique du plan. Supposons que l'élément ds ait une direction non parallèle aux axes. Ses deux projections dx et dy seraient donc plus petites que le minimum absolu ds . Il nous paraît impossible d'éviter cette contradiction.

Aux amateurs d'infiniment petits absolus, aux personnes désireuses d'arriver à les fixer, nous poserons encore la question suivante:

Soient x et $x + dx$ les abscisses de deux points consécutifs; si l'on suppose $dx > 0$, où se trouve le point répondant à l'abscisse $x + dx^2$?

Toutes ces questions cesseront de troubler beaucoup de cerveaux, dès que le principe de M. Deruyts leur en aura fait voir la complète inutilité.

Vouloir fixer un infiniment petit, c'est ridicule autant qu'inutile: ridicule, parce que cela conduit à toute une foule de contradictions; inutile, nous venons de dire pourquoi. Quant à la géométrie atomique, c'est une illustration pure et simple des aberrations précédentes; c'est un pesant héritage que nous léguèrent les siècles précédents.

Dans sa Préface (1878), HOÜEL déclare l'identité de la méthode des infiniments petits et de celle des limites. Mais son ouvrage paraît les opposer l'une à l'autre: la méthode infinitésimale semble n'être qu'une approximation plus ou moins discutable, engendrant d'ailleurs toutes les discussions que nous venons de résumer; tandis que la méthode des limites est rigoureuse et logiquement parfaite.

Pour terminer ces considérations, nous allons montrer comment les deux méthodes doivent marcher de pair (116, 119). Envisageons une courbe quelconque. L'intuition prétend en concevoir la longueur. Victorieusement, la logique lui démontre qu'elle se trompe. Mais c'est malgré tout l'intuition qui nous aura suggéré la marche à suivre.

A la courbe étudiée inscrivons un polygone. Si le nombre des côtés est grand, le polygone et la courbe diffèrent peu; si le nombre des côtés est très grand et les côtés tous très petits, courbe et polygone diffèrent très peu; si le nombre augmente et que tous les côtés diminuent, la différence indiquée s'amointrit; et cette différence *deviendra* de plus en plus insignifiante à mesure que les côtés *deviendront* de plus en plus petits et de plus en plus nombreux. Voilà de l'analyse infinitésimale; malheureusement, cela manque de rigueur. Et c'est à ce moment précis que doit intervenir la méthode des limites. Elle s'empare d'un édifice compliqué d'infiniment petits, en perfectionne l'architecture, mais en modifie légèrement la destination.

Ne dites pas: Une courbe est un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits. C'est ridicule, ou cela ne veut rien dire. Choisissez.

Mais dites plutôt. Une courbe est la limite vers laquelle tend un polygone ayant un nombre infiniment grand de côtés infiniment petits; les infinis que contient cette proposition sont des infinis mathématiques, essentiellement variables.

Mais qu'est-ce qu'une limite? De ce qu'elle est inaccessible, d'aucuns concluent à son inexistence. Certaines personnes révoquent en doute l'existence objective de $\sqrt{2}$. Un professeur d'école moyenne me disait un jour: N'est-il pas déconcertant que la circonférence n'ait aucun rapport avec son diamètre? — Mais ce rapport est π ! — Oui, parfaitement, mais π n'existe pas. — Nous ferons ici la même remarque qu'à propos de la tangente: toute limite existe indépendamment de

la grandeur qui tend vers elle; la méthode des limites cache une faiblesse de l'esprit mathématique.

Aux personnes qui douteraient de l'existence objective des incommensurables, je conseillerai vivement de lire et d'étudier les *Leçons sur la théorie des fonctions*, de M. BOREL; à leurs méditations je recommanderai spécialement la théorie des nombres algébriques; puis celle des nombres transcendants; puis enfin, la remarquable théorie de l'ensemble qui comprend tous les nombres depuis *zéro* jusqu'à *un*: cet ensemble n'est pas dénombrable; il possède la puissance du continu; dans cet ensemble, non seulement les nombres commensurables ne sont que l'exception, mais les nombre algébriques eux-mêmes ne forment qu'une infime minorité.

Une variable indépendante, parcourant *d'une manière continue* un intervalle quelconque de variation, n'existera-t-elle objectivement que quand elle sera commensurable? Répondre affirmativement, ce serait répondre qu'elle n'existe presque jamais.

Il faut donc admettre l'indiscutable existence d'une limite; se rappeler toujours qu'un infiniment petit est variable par essence, et renoncer par conséquent à vouloir le fixer avec précision. Ne dites pas: pendant l'intervalle de temps dt le mobile a parcouru l'espace ds ; donc sa vitesse est

$$v = \frac{ds}{dt};$$

mais dites: la vitesse moyenne du mobile,

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

a pour limite sa vitesse instantanée

$$v = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Il sied aussi de beaucoup admirer l'ouvrage de Hoüel; mais il faut regretter amèrement qu'il ait confondu, toujours et partout, les variations et les différentielles.

Enfin, ne perdons pas de vue que toute la controverse et toute la difficulté trouvent leur origine dans le problème de la différentiation des différentielles. Pour ce problème, une solution tout à fait inattendue et particulièrement élégante nous est fournie par le principe de M. Deruyts. Ce remarquable principe clora-t-il les débats? Ou ceux-ci renaîtront-ils sous une autre forme? L'avenir seul peut évidemment nous l'apprendre.

En terminant, je demanderai que l'on me pardonne la longueur de ce travail. La question de méthodologie que je viens d'exposer

me semble d'une extrême importance. Je suis d'avis que tous les cours d'analyse devraient la présenter d'une façon très détaillée. C'est en l'examinant sous des points de vue toujours nouveaux que l'on en hâtera la solution définitive.

Louvain, le 21 décembre 1928.

Marcel WINANTS.

Sur un point remarquable du triangle.

A propos d'un article de M. G. FRANKE.

Le travail que M. G. FRANKE publie dans l'*Enseignement mathématique* (28^{me} année, 1929, pp. 91-110) sous le titre *Sur un point remarquable du triangle* n'étant accompagné d'aucune référence, les jeunes lecteurs de la Revue pourraient croire que cette question est nouvelle. A notre connaissance, elle est âgée de plus d'un demi-siècle.

La revue mathématique belge *Mathesis*, dirigée actuellement par M. Ad. MINEUR, s'en est occupé de nombreuses fois depuis 1922, et NEUBERG y a publié des renseignements bibliographiques (*Bibliographie du triangle et du tétraèdre*, 1922, pp. 50, 117, 161, 209, 353; 1923, pp. 5, 49, 97, 145, 193, 241, 289, 337, 401, 449; 1924, pp. 5, 97, 193, 241, 289, 337, 385) qui vont nous permettre d'esquisser l'histoire de la question, sans prétendre être complet.

1. — La terminologie de M. STREIT, traducteur de M. FRANKE, n'étant pas celle qu'adoptent généralement les géomètres, nous rappelons quelques définitions.

Etant donné un triangle ABC et un point quelconque P de son plan, les droites AP, BP, CP sont les *céviennes* du point P; elles rencontrent les côtés BC, CA, AB aux points A_1 , B_1 , C_1 qui sont les sommets du *triangle pédal* $A_1B_1C_1$ du point P, tandis que les projections orthogonales A' , B' , C' de P sur BC, CA, AB sont les sommets du *triangle podaire* $A'B'C'$ de P.

Si les perpendiculaires abaissées des sommets d'un premier triangle $A'B'C'$ sur les côtés BC, CA, AB d'un second triangle ABC concourent en un point P, les perpendiculaires abaissées de A, B, C sur $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ concourent également en un point P'. Deux tels triangles sont appelés *orthologiques*; les points P, P' sont les *centres d'orthologie* (STEINER, *Crelle*, II-287; EBERTY, *id.*, V-107; E. LEMOINE, *Association française pour l'avancement des Sciences*, 1890-111; NEUBERG, *Mathesis*, 1901-157; R. BRICARD, *Nouvelles annales de mathématiques*, 1920-240; THÉBAULT, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1922-128).

Lorsque deux triangles sont à la fois homologues et orthologiques, ils sont dits *biologiques*. Les deux centres d'orthologie et le centre d'homologie se trouvent sur une même droite normale à l'axe d'homologie (SONDAT, *Intermédiaire des mathématiciens*, 1894-10; SOLLERTINSKY, *id.*, 1894-44; FUHRMANN, *Dissertation*, Königsberg, 1902; CL. SERVAIS, *Nouvelles Annales de mathématiques*, 1919-260 et *Bulletin de l'Académie royale de Belgique, classe des Sciences*, 1921-211).

2. — Si le triangle podaire $A'B'C'$ d'un point P correspond au triangle ABC dans une homologie de centre Q , il est dit *biologique*. La conique circonscrite au triangle $A'B'C'$ et inscrite au triangle ABC est dite *conique de THOMSON* ou *trinormalement inscrite au triangle ABC*; soit ω son centre.

Les lieux (P) , (Q) , (ω) des points P , Q , ω ont été proposés respectivement par DARBOUX sous une forme un peu différente (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1866-95), par ED. LUCAS (*Id.*, 1876-240 et *Nouvelle Correspondance mathématique*, 1876-94), ainsi que par LAGUERRE (*Id.*, 1879-144), et par THOMSON (*Id.*, 1865-144, question extraite de *Educational Times*, 1864); ils sont du troisième ordre, et NEUBERG les appelle cubiques de DARBOUX, de LUCAS, de THOMSON ou des dix-sept points.

DEWULF traite la question de LUCAS par les méthodes de la Géométrie supérieure (*Nouvelles annales*, 1876-550), et une solution analytique très développée a été donnée par H. VAN AUBEL (*Nouvelle correspondance*, 1876-276 et 335; 1878-261).

Ces cubiques sont des cas particuliers de la cubique anallagmatique déduite comme suit. Étant donné un point O appelé *pivot* et un faisceau ponctuel de coniques circonscrites à un quadrangle $RSTU$, le lieu des points de contact des tangentes aux coniques et issues de O (ou encore le lieu des couples de points conjugués par rapport au faisceau et alignés sur O) est en général une cubique non singulière sur laquelle les deux quaternaires $RSTU$, $ABCO$ sont deux quadruples dont les tangentiels sont O et son conjugué O' par rapport au faisceau; le triangle pédal de O dans le triangle diagonal ABC du quadrangle $RSTU$ est inscrit à la cubique et ses sommets forment avec O' un nouveau quadruple (AD. MINEUR, *Journal de Mathématiques spéciales*, 1894-14, et *Mathesis*, 1923-145; R. DEAUX, *Mathesis*, 1923-316). Suivant que R , S , T , U sont les centres des cercles tritangents au triangle ABC , ou le centre de gravité et les symétriques des sommets de ce triangle par rapport aux milieux des côtés opposés, la cubique est le lieu des couples de points isogonaux (inverses triangulaires) ou réciproques alignés sur le pivot O , et est anallagmatique en coordonnées normales ou barycentriques (NEUBERG, *Mathesis*, 1923-97).

Les cubiques de DARBOUX et de THOMSON sont anallagmatiques en coordonnées normales, et celle de LUCAS l'est en coordonnées barycentriques; leurs pivots sont le symétrique de l'orthocentre du triangle

ABC par rapport au centre du cercle circonscrit (point de LONGCHAMPS), le centre de gravité, le réciproque de l'orthocentre.

Les cubiques de DARBOUX et de LUCAS ont été envisagées par M. TURRIÈRE au point de vue arithmogéométrique dans la 18^{me} année de cette Revue ¹.

3. — Outre la bibliographie de NEUBERG, voici les questions et articles publiés par *Mathesis* depuis 1923 et relatifs aux cubiques en cause:

1923. Question 2119 (BRESSON); note de M. BIOCHE (p. 241) signalée par M. HACKEN;
R. GOORMAGHTIGH, *Sur l'orthopôle et sur un théorème de MORLEY*, pp. 257 et 300.
1924. CL. SERVAIS, *Sur la cubique de THOMSON*, p. 145;
Question 2275 (GOORMAGHTIGH);
R. DEAUX, *Sur quelques lieux relatifs aux coniques de THOMSON*, p. 220;
R. DEAUX, *Sur les cubiques de DARBOUX et de LUCAS*, pp. 395, 430;
J. NEUBERG, *Sur les cubiques de DARBOUX, de LEMOINE et de THOMSON dans le supplément de février*.
1925. BARBALATT, *Transformations déduites de la construction de couples de points sur les côtés d'un triangle*, p. 449.
1926. Question 2370 (MICU GRÜNBAUM);
R. DEAUX, *Sur le lieu du centre du cercle circonscrit à un triangle podaire bilogique*, p. 393.
1927. R. DEAUX, *Sur les coniques de THOMSON*, p. 105; question 2411 (LEMOINE); R. GOORMAGHTIGH, *Sur un théorème relatif au triangle*, p. 444.
1928. R. GOORMAGHTIGH, *Sur les théorèmes de KIEPERT et de KARIYA*, p. 53, et question 2527.
1929. Résolution de la question 2260 (P. DE LÉPINEY).

Mons, 17 septembre 1929.

R. DEAUX, *Professeur à l'École des Mines*.

¹ On peut rapprocher cette citation de la remarque faite plus loin, dans la Bibliographie (p. 341), à la fin de l'analyse concernant le fascicule T. Nagell.