APPLICATION DES NOTATIONS TENSORIELLES DANS LE CALCUL VECTORIEL

Autor(en): **Stoyanoff, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22595

APPLICATION DES NOTATIONS TENSORIELLES DANS LE CALCUL VECTORIEL

PAR

A. Stoyanoff (Sofia).

---

§ 1. Soient a et b deux vecteurs de composantes a_m et b_m (ou bien a^m et b^m)[1]. On appelle *produit intérieur* de a et b l'invariant $a_m b^m$. On appelle *produit extérieur* de a et b le tenseur symétrique gauche du II^e ordre de composantes $\sigma^{ik} = a^i b^k - a^k b^i$.

Dans l'espace euclidien à 3 dimensions ce tenseur n'a que 3 composantes indépendantes différentes de zéro; dans le calcul vectoriel on le confond avec un vecteur. On pourrait employer pour ce vecteur la notation suivante

$$v_m = \varepsilon_{mnp} a^n b^p \,, \qquad \text{ou bien} \qquad v^m = \varepsilon^{mnp} a_n b_p \,,$$

ε_{mnp} désignant un symbole à 3 indices[2] défini de la façon suivante: $\varepsilon_{mnp} = 0$, si deux des indices sont égaux;

$\varepsilon_{mnp} = sgn\,(m, n, p)$, si les 3 indices sont différents[3] (par conséquent mnp représente une permutation des nombres 1,2,3).

Remarque. On peut se servir également de la formule de définition plus compliquée

$$\varepsilon_{mnp} = \frac{1}{2}(m - n)(n - p)(p - m) \,.$$

---

[1] Comme dans le calcul vectoriel on opère dans un espace euclidien à trois dimensions et qu'on n'emploie que des coordonnées cartésiennes rectangulaires, il n'y a pas lieu de faire de distinction entre les composantes covariantes et contrevariantes d'un tenseur.

[2] C'est un cas particulier d'un tenseur plus général introduit par MM. Ricci et Levi-Civita.

[3] Je rappelle que $sgn\,(m, n, p) = \pm 1$, suivant que la permutation mnp a un nombre pair ou impair d'inversions. Ex.: $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$.

Par conséquent

$$\varepsilon_{mnp} = - \varepsilon_{mpn} , \quad \text{etc.} \qquad \varepsilon_{mnp} = \varepsilon_{npm} = \varepsilon_{pmn} .$$

Calculons par exemple v_1. On a $v_1 = \varepsilon_{1np} a^n b^p$ (cette somme ne contient que deux termes différents de zéro) $= \varepsilon_{123} a^2 b^3 + \varepsilon_{132} a^3 b^2 = a^2 b^3 - a^3 b^2$.

§ 2. Plus tard, nous rencontrerons le symbole à 4 indices

$$g^{rs}_{np} = \varepsilon_{mnp} \varepsilon^{mrs} = \varepsilon_{1np} \varepsilon^{1rs} + \varepsilon_{2np} e^{2rs} + \varepsilon_{3np} \varepsilon^{3rs} .$$

Propriétés de g^{rs}_{np}.

$$g^{rs}_{np} = - g^{rs}_{pn} = - g^{sr}_{np} = g^{sr}_{pn} ;$$

$$\text{par conséquent} \quad g^{rs}_{np} = 0 , \quad \text{si} \quad n = p \quad \text{ou} \quad r = s .$$

Cherchons les composantes de g^{rs}_{np} non nulles. Donnons à n et p deux valeurs distinctes choisies parmi les nombres 1, 2, 3; alors dans la somme précédente

$$\varepsilon_{1np} \varepsilon^{1rs} + \varepsilon_{2np} \varepsilon^{2rs} + \varepsilon_{3np} e^{3rs}$$

il ne reste qu'un seul terme obtenu en donnant à m la troisième valeur; on en déduit que r et s doivent avoir les mêmes valeurs que n et p; c'est-à-dire on doit avoir $r = n$, $s = p$, ou bien $r = p$, $s = n$. Dans le premier cas g^{rs}_{np} est égal à $+ 1$, dans le second à $- 1$.

Application. Considérons la somme $g^{rs}_{np} \mathrm{A}_{rs..}$ ($\mathrm{A}_{rs..}$ désignant un tenseur à deux ou plusieurs indices, parmi lesquels se trouvent r et s). Effectuons la sommation indiquée; d'après les propriétés du symbole g, nous n'aurons que deux termes

$$g^{np}_{np} \mathrm{A}_{np..} + g^{pn}_{np} \mathrm{A}_{pn..} = \mathrm{A}_{np..} - \mathrm{A}_{pn..} ;$$

par conséquent

$$g^{rs}_{np} \mathrm{A}_{rs..} = \mathrm{A}_{np..} - \mathrm{A}_{pn..}$$

c'est-à-dire g^{rs}_{np} joue le rôle de signe de substitution.

On vérifie sans peine que $g^{rs}_{np} + g^{sp}_{nr} + g^{pr}_{ns} = 0$, quels que soient n, p, r, s.

§ 2′. On voit immédiatement que $\varepsilon_{mnp}\,\varepsilon^{mns} = 2 g_p^s$, c'est-à-dire $+2$ ou 0 suivant que $s = p$ ou $s \neq p$.

§ 3. Nous pouvons maintenant aborder l'algèbre vectorielle et déduire avec une grande facilité les formules les plus compliquées. Par exemple

$$\vec{a} \times \vec{b} \,.\, \vec{c} = \vec{v} \,.\, \vec{c} = v_m\, c^m = \varepsilon_{mnp}\, a^n\, b^p\, c^m = \varepsilon_{npm}\, a^n\, b^p\, c^m$$

$$= sgn\,(n\,,\, p\,,\, m)\, a^n\, b^p\, c^m = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} .$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{v} = \varepsilon_{mnp}\, a^n\, v^p = \varepsilon_{pmn}\, a^n\, \varepsilon^{prs}\, b_r\, c_s = g_{mn}^{rs}\, a^n\, b_r\, c_s$$

$$= a^n\, b_m\, c_n - a^n\, b_n\, c_m = (\vec{a} \,.\, \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \,.\, \vec{b})\, \vec{c}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \,.\, (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{u} \,.\, \vec{v} = u_m\, v^m = \varepsilon_{mnp}\, a^n\, b^p\, \varepsilon^{mrs}\, c_r\, d_s = g_{np}^{rs}\, a^n\, b^p\, c_r\, d_s$$

$$= a^n\, b^p\, c_n\, d_p - a^n\, b^p\, c_p\, d_n = (\vec{a} \,.\, \vec{c})\,(\vec{b} \,.\, \vec{d}) - (\vec{a} \,.\, \vec{d})\,(\vec{b} \,.\, \vec{c})$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{u} \times \vec{v} = \varepsilon_{mnp}\, u^n\, v^p = \varepsilon_{npm}\, \varepsilon^{nrs}\, a_r\, b_s\, \varepsilon^{pik}\, c_i\, d_k$$

$$= g_{pm}^{rs}\, \varepsilon^{pik}\, a_r\, b_s\, c_i\, d_k = \varepsilon^{pik}\, a_p\, b_m\, c_i\, d_k - \varepsilon^{pik}\, a_m\, b_p\, c_i\, d_k$$

$$= (\vec{a} \times \vec{c} \,.\, \vec{d})\, \vec{b} - (\vec{b} \times \vec{c} \,.\, \vec{d})\, \vec{a} \,.$$

§ 4. *Notations.* Nous désignerons par $x^m (m = 1, 2, 3)$, les coordonnées d'un point quelconque de l'espace, par $\Delta_m \mathrm{F}$ ou $\Delta^m \mathrm{F}$ la dérivée par rapport à x^m d'une fonction de point, c'est-à-dire

$$\Delta_m \mathrm{F} \quad \text{ou} \quad \Delta^m \mathrm{F} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x^m} .$$

On a par définition, φ étant un scalaire, $\vec{u}$ un vecteur,
grad φ = le vecteur de composantes $\varphi_m = \Delta_m \varphi$,
div $\vec{u}$ = le scalaire $\Delta_m u^m$,
rot $\vec{u}$ = le vecteur $\mathrm{R}_m^{(\vec{u})} = \varepsilon_{mnp}\, \Delta^n u^p$.

Ceci posé, on obtient sans peine toutes les formules de l'analyse vectorielle

$$\text{div grad } \varphi = \Delta_m \varphi^m = \Delta_m \Delta^m \varphi = \Delta \varphi \text{ (opérateur de Laplace)}$$

$$\text{rot grad } \varphi = \varepsilon_{mnp} \Delta^n \varphi^p = \varepsilon_{mnp} \Delta^n \Delta^p \varphi \equiv 0$$

$$\text{div rot } \vec{u} = \Delta^m R_m = \Delta^m \varepsilon_{mnp} \Delta^n u^p = \varepsilon_{mnp} \Delta^m \Delta^n u^p \equiv 0 \; .$$

$$\text{rot rot } \vec{u} = \varepsilon_{mnp} \Delta^n R^p = \varepsilon_{pmn} \Delta^n \varepsilon^{prs} \Delta_r u_s = g_{mn}^{rs} \Delta^n \Delta_r u_s$$

$$= \Delta^n \Delta_m u_n - \Delta^n \Delta_n u_m = \Delta_m (\Delta^n u_n) - \Delta u_m = \text{grad div } \vec{u} - \Delta \vec{u} \; .$$

$$\text{div } (\varphi \vec{u}) = \Delta_m (\varphi u^m) = \varphi_m u^m + \varphi \Delta_m u^m = \text{grad } \varphi . \vec{u} + \varphi \text{ div } \vec{u}$$

$$\text{rot } (\varphi \vec{u}) = \varepsilon_{mnp} \Delta^n (\varphi u^p) = \varepsilon_{mnp} \varphi^n u^p + \varphi \varepsilon_{mnp} \Delta^n u^p$$

$$= \text{grad } \varphi \times \vec{u} + \varphi \text{ rot } \vec{u}$$

$$\text{div } (\vec{u} \times \vec{v}) = \text{div } \vec{w} = \Delta^m w_m = \Delta^m \varepsilon_{mnp} u^n v^p$$

$$= v^p \varepsilon_{mnp} \Delta^m u^n + u^n \varepsilon_{mnp} \Delta^m v^p$$

$$= v^p \varepsilon_{pmn} \Delta^m u^n - u^n \varepsilon_{nmp} \Delta^m v^p = v^p R_p^{(\vec{u})} - u^n R_n^{(\vec{v})}$$

$$= \vec{v} . \text{rot } \vec{u} - \vec{u} . \text{rot } \vec{v} \; .$$