

2. — Les équations bipolaires et tripolaire de l'ovale

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

si les cônes S_1 et S_2 sont égaux, une hyperbole de foyers F_2 et F_3 si les cônes S_2 et S_3 sont égaux et de foyers F_3 et F_1 si les cônes S_3 et S_1 sont égaux.

2. — Les équations bipolaires et tripolaire de l'ovale.

Soient P et P' les projections sur le plan horizontal et sur le plan V d'un point quelconque de la courbe d'intersection des trois cônes, et π, S'_1, S'_2, S'_3 les projections de ce point et des trois sommets sur un axe vertical pour lequel nous choisissons un sens positif XX' . Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les segments $\pi S'_1, \pi S'_2, \pi S'_3$ et h_1, h_2, h_3 les segments $S'_2 S'_3, S'_3 S'_1, S'_1 S'_2$. La relation de Chasles, appliquée successivement aux points S'_1, S'_2, S'_3 ; π, S'_1, S'_2 ; π, S'_2, S'_3 ; π, S'_3, S'_1 , nous donne

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0 \quad (1)$$

$$\rho_1 + h_3 - \rho_2 = 0 \quad (2)$$

$$\rho_2 + h_1 - \rho_3 = 0 \quad (3)$$

$$\rho_3 + h_2 - \rho_1 = 0 \quad (4)$$

Multiplions respectivement (2) et (3) par h_1 et par $(-h_3)$ et ajoutons membre à membre; il vient

$$\rho_1 h_1 - \rho_2 (h_1 + h_3) + \rho_3 h_3 = 0$$

ou, en vertu de (1)

$$\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 = 0 \quad (5)$$

Soient ρ_1, ρ_2, ρ_3 les distances du point P aux trois foyers F_1, F_2, F_3 et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs au signe près des cotangentes des demi-angles au sommet des trois cônes. Convenons de donner à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les signes respectifs de ρ_1, ρ_2, ρ_3 , nous aurons

$$\rho_1 = \lambda_1 \rho_1 \quad \rho_2 = \lambda_2 \rho_2 \quad \rho_3 = \lambda_3 \rho_3$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 étant toujours positifs.

¹ En exprimant h_1, h_2, h_3 en fonction de ρ_1, ρ_2, ρ_3 , on a

$$\rho_1(\rho_3 - \rho_2) + \rho_2(\rho_1 - \rho_3) + \rho_3(\rho_2 - \rho_1) = 0$$

Etant données trois segments de même origine portés sur un même axe, la somme algébrique des produits de chacun d'eux par la différence des deux autres est nulle, puisque, dans cette somme, chaque produit de deux segments intervient deux fois et avec des signes contraires.

En y remplaçant ρ_1, ρ_2, ρ_3 par ces valeurs, les relations (2), (3), (4) et (5) deviennent

$$\lambda_1 \rho_1 - \lambda_2 \rho_2 + h_3 = 0 \quad \lambda_2 \rho_2 - \lambda_3 \rho_3 + h_1 = 0 \quad \lambda_3 \rho_3 - \lambda_1 \rho_1 + h_2 = 0$$

$$h_1 \lambda_1 \rho_1 + h_2 \lambda_2 \rho_2 + h_3 \lambda_3 \rho_3 = 0$$

Ce sont les équations bipolaires et tripolaire de l'ovale de Descartes, rapportées à ses foyers.

Si nous remarquons que $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3|$, nous voyons que l'équation bipolaire étant rapportée aux deux foyers intérieurs F_1 et F_2 , le foyer extérieur F_3 est du côté du foyer intérieur pour lequel le coefficient du rayon vecteur a la plus petite valeur absolue et que l'équation bipolaire étant rapportée à un foyer intérieur et au foyer extérieur, le rayon vecteur correspondant à ce dernier est affecté du coefficient le plus petit en valeur absolue.

Sur une équation bipolaire $\lambda \rho + \lambda' \rho' - k = 0$, il est facile de voir si les deux foyers auxquels elle est rapportée sont ou non de même nature. Remplaçons-y successivement ρ et ρ' par les rayons vecteurs $(0, 2b)$ et $(2b, 0)$ qui correspondent aux deux foyers: si $2b\lambda' - k$ et $2b\lambda - k$ ont le même signe les deux foyers sont intérieurs; dans le cas contraire, un des deux foyers est intérieur, l'autre est extérieur.

Nous avons (fig. 1) $h_1 < 0, h_2 > 0, h_3 < 0$ et pour l'ovale intérieure $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$; pour l'ovale extérieure, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$.

Si nous désignons par k, λ et λ' des quantités essentiellement positives, et si nous supposons $\lambda' > \lambda$, le tableau suivant nous indique les formes que prennent les équations des deux ovales conjuguées suivant les foyers auxquelles elles sont rapportées.

Foyers	Ovale intérieure	Ovale extérieure
$F_1 F_2$	$\lambda \rho + \lambda' \rho' = k$	$\lambda' \rho' - \lambda \rho = k$
$F_2 F_3$	$\lambda \rho - \lambda' \rho' = k$	$\lambda' \rho' - \lambda \rho = k$
$F_3 F_1$	$\lambda \rho + \lambda' \rho' = k$	$\lambda' \rho' - \lambda \rho = k$

Ce tableau montre également comment on passe d'une équation de l'ovale à celle de l'ovale conjuguée rapportée aux deux mêmes foyers.

Etant donnée une équation bipolaire, quand on a calculé la position du troisième foyer, on peut calculer les h .

Connaissant la position de deux foyers, il est aisé de trouver la position des sommets. Désignons par a_j (f étant égal à 1, 2 ou 3) a'_j , b_j , b'_j les distances respectives du foyer F_j aux sommets A_1 , A_2 , B_1 , B_2 des deux ovals conjugués, et supposons, par exemple, l'ovale donnée par l'équation bipolaire $\lambda_1 \rho_1 - \lambda_2 \rho_2 + h_3 = 0$. Exprimant que le sommet A_1 est sur la courbe nous avons $\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 + h_3 = 0$. Si nous appelons $2b$ la distance des deux foyers $F_1 F_2$, $a_2 = a_1 + 2b$ et la relation précédente devient $\lambda_1 a_1 - \lambda_2 (a_1 + 2b) + h_3 = 0$, d'où nous pouvons tirer a_1 .

D'autre part,

$$\lambda_2 a_2 - \lambda_3 a_3 = \lambda_2 a'_2 - \lambda_3 a'_3 = -h_1 .$$

D'où $\lambda_3 (a_3 - a'_3) = \lambda_2 (a_2 - a'_2)$, relation qui nous fait connaître λ_3 . On pourrait, connaissant h_3 et h_1 avoir h_2 par la relation $h_1 + h_2 + h_3 = 0$. Ainsi une des équations bipolaires d'une ovale étant donnée, nous pouvons trouver les deux autres équations bipolaires et l'équation tripolaire. Si l'ovale est donnée par ses trois foyers et son équation tripolaire, nous pouvons déterminer ses deux sommets et trouver ses équations bipolaires.

D'après le tableau qui précède, l'équation $\lambda \rho - \lambda' \rho' = k$ représente toujours une ovale intérieure rapportée aux foyers F_2 et F_3 . Les autres formes d'équations bipolaires indiquent simplement que l'ovale est intérieure ou extérieure. Pour savoir à quels foyers elle est rapportée, il convient de chercher la position de ses sommets et celle du point milieu O de l'intervalle qui les sépare: la disposition des deux foyers connus par rapport à O , fait voir si ce sont F_1 , F_2 ou F_3 .

3. — L'ovale courbe anallagmatique.

Si on prend pour pôle un quelconque des trois foyers et pour axe la droite $F_1 F_2 F_3$, l'équation de l'ovale en coordonnées polaires ρ et θ se présente sous la forme $\rho^2 + P\rho + Q = 0$, P étant une fonction linéaire de $\cos \theta$ et Q une constante. La transformation par rayons vecteurs réciproques autour du pôle