3. — L'ovale courbe anallagmatique.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Etant donnée une équation bipolaire, quand on a calculé la position du troisième foyer, on peut calculer les h.

Connaissant la position de deux foyers, il est aisé de trouver la position des sommets. Désignons par a_f (f étant égal à 1, 2 ou 3) a'_f, b_f, b'_f les distances respectives du foyer F_f aux sommets A_1, A_2, B_1, B_2 des deux ovales conjuguées, et supposons, par exemple, l'ovale donnée par l'équation bipolaire $\lambda_1\rho_1 - \lambda_2\rho_2 + h_3 = 0$. Exprimant que le sommet A_1 est sur la courbe nous avons $\lambda_1 a_1 - \lambda_2 a_2 + h_3 = 0$. Si nous appelons $2b$ la distance des deux foyers F_1F_2, $a_2 = a_1 + 2b$ et la relation précédente devient $\lambda_1 a_1 - \lambda_2(a_1 + 2b) + h_3 = 0$, d'où nous pouvons tirer a_1.

D'autre part,

$$\lambda_2 a_2 - \lambda_3 a_3 = \lambda_2 a'_2 - \lambda_3 a'_3 = - h_1 \ .$$

D'où $\lambda_3(a_3 - a'_3) = \lambda_2(a_2 - a'_2)$, relation qui nous fait connaître λ_3. On pourrait, connaissant h_3 et h_1 avoir h_2 par la relation $h_1 + h_2 + h_3 = 0$. Ainsi une des équations bipolaires d'une ovale étant donnée, nous pouvons trouver les deux autres équations bipolaires et l'équation tripolaire. Si l'ovale est donnée par ses trois foyers et son équation tripolaire, nous pouvons déterminer ses deux sommets et trouver ses équations bipolaires.

D'après le tableau qui précède, l'équation $\lambda\rho - \lambda'\rho' = k$ représente toujours une ovale intérieure rapportée aux foyers F_2 et F_3. Les autres formes d'équations bipolaires indiquent simplement que l'ovale est intérieure ou extérieure. Pour savoir à quels foyers elle est rapportée, il convient de chercher la position de ses sommets et celle du point milieu 0 de l'intervalle qui les sépare: la disposition des deux foyers connus par rapport à 0, fait voir si ce sont F_1, F_2 ou F_3.

3. — *L'ovale courbe anallagmatique.*

Si on prend pour pôle un quelconque des trois foyers et pour axe la droite $F_1F_2F_3$, l'équation de l'ovale en coordonnées polaires ρ et θ se présente sous la forme $\rho^2 + P\rho + Q = 0$, P étant une fonction linéaire de cos θ et Q une constante. La transformation par rayons vecteurs réciproques autour du pôle

$\rho\sigma = Q$ conduit à l'équation $Q + P\sigma + \frac{Q}{Q}\sigma^2 = 0$. L'ovale est donc une courbe synallagmatique par rapport à chacun de ses foyers pris pour origine [1].

Dans la figure 1, le quadrilatère inscriptible $A'_1 A'_2 B'_2 B'_1$ nous donne les relations

$$S_1A'_1 \cdot S_1B'_1 = S_1A'_2 \cdot S_1B'_2 \qquad S_2A'_1 \cdot S_2B'_2 = S_2A'_2 \cdot S_2B'_1$$

$$S_3A'_1 \cdot S_3A'_2 = S_3B'_1 \cdot S_3B'_2 \, .$$

Les deux points de la quartique gauche qui sont sur une même génératrice du cône S_1 correspondent l'un à l'ovale intérieure, l'autre à l'ovale extérieure et sont d'un même côté de S_1; pour le cône S_2 les deux points correspondent l'un à l'ovale intérieure, l'autre à l'ovale extérieure et sont de part et d'autre de S_2; pour le cône S_3, les deux points correspondent tous deux soit à l'ovale intérieure, soit à l'ovale extérieure et sont d'un même côté de S_3. Chacune des ovales conjuguées est à elle-même son inverse par rapport à F_3, la puissance d'inversion m_3^2 étant positive (cercle d'inversion réel passant par les points de contact des tangentes menées du foyer extérieur aux deux branches de la courbe. On a $m_3^2 = a_3 . a'_3 = b_3 . b'_3$; a_3, a'_3, b_3 et b'_3 conservant les significations indiquées plus haut). Les tangentes menées du foyer extérieur à deux ovales conjuguées sont égales.

Les deux ovales conjuguées sont inverses l'une de l'autre par rapport à F_1 et F_2: la puissance d'inversion m_1^2 relative à F_1 est positive (cercle d'inversion réel passant entre les deux courbes); la puissance d'inversion $- m_2^2$ relative à F_2 étant négative (cercle d'inversion imaginaire).

On a

$$m_1^2 = a_1 b_1 = a'_1 b'_1 \qquad \text{et} \qquad m_2^2 = a_2 b'_2 = a'_2 b_2 \, .$$

On trouverait aussi ces valeurs de m_1^2, m_2^2, m_3^2 en calculant le terme constant Q de l'équation monopolaire qui correspond à chacun des trois foyers.

---

[1] L'ovale étant symétrique par rapport à l'axe $F_1F_2F_3$ (puisque le plan V est un plan de symétrie pour les trois cônes), et la symétrie par rapport à un axe pouvant être considérée comme une inversion dont le centre s'est éloigné à l'infini dans une direction perpendiculaire à l'axe de symétrie, l'ovale possède quatre origines d'anallagmatisme comme toute quartique bicirculaire.

Partons du sommet A_1: l'inversion m_1^2 nous mène en B_1, puis l'inversion $-m_2^2$ nous mène en A_2, et enfin l'inversion m_3^2 nous ramène en A_1. Donc $m_1^2 . m_2^2 . m_3^2 = 1$.

Le foyer F_3 a même puissance par rapport aux deux cercles de diamètre $A_1 A_2$ et $B_1 B_2$: il est donc sur leur axe radical. Puisque, connaissant l'équation bipolaire $\lambda_1 \rho_1 - \lambda_2 \rho_2 + h_3 = 0$ d'une ovale, on en déduit facilement l'équation de l'ovale conjuguée et la position des sommets de cette dernière, nous obtenons ainsi une seconde construction du foyer extérieur F_3. On voit sans peine que F_1 et F_2 pourraient aussi se trouver par une construction d'axe radical: F_1 est sur l'axe radical des deux cercles décrits sur $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$ comme diamètres, et la corde commune aux deux cercles décrits sur $A_1 B_2$ et $A_2 B_1$ comme diamètres passe par F_2.

Cercle tangent à l'ovale et passant par deux points donnés dont un de ses foyers. — L'inversion anallagmatique autour du foyer par lequel doit passer le cercle à construire transforme ce cercle en une droite tangente à l'ovale et passant par le point inverse de l'autre point donné. Le point inverse de son point de contact avec l'ovale est le point où le cercle à construire touche l'ovale. En particulier, le cercle passant par F_1 et F_2 et tangent à l'ovale se déduit par inversion autour du foyer F_1, par exemple, de la tangente à l'ovale conjuguée qui passe par l'inverse de F_2.

4. — *Sécantes passant par un foyer.*

D'une propriété bien connue de la transformation par rayons vecteurs réciproques, il résulte immédiatement que: 1° toute sécante à l'ovale menée par F_1 est bissectrice des directions des tangentes aux deux points situés d'un même côté de l'axe où elle coupe les deux ovales conjuguées; 2° toute sécante menée par F_2 est bissectrice des directions des tangentes aux deux points situés de part et d'autre de l'axe où elle coupe ces deux ovales; 3° toute sécante menée par F_3 est bissectrice des directions des tangentes aux deux points où elle coupe chacune des ovales intérieure et extérieure.