

II. — Normale a l'ovale.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

D'autre part,

$$A_0A' = \lambda_2 \cdot F_2A = \lambda_1(4c - F_2A) \quad \text{d'où} \quad F_2A = \frac{4\lambda_1 c}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

$$B_0B = \lambda_2 \cdot F_2B = \lambda_1(F_2B - 4c) \quad \text{d'où} \quad F_2B = \frac{4\lambda_1 c}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Par suite

$$r = \frac{F_2C}{2} = \frac{F_2A + F_2B}{4} = \lambda_1 c \left(\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) = \frac{2\lambda_1^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.$$

Désignons par F_s le foyer singulier; ses distances aux trois foyers ordinaires sont ¹

$$F_s F_1 = \frac{2\lambda_2^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad F_s F_2 = \frac{2\lambda_1^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad F_s F_3 = 2 \frac{d^2}{c} \cdot \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.$$

F_s est extérieur à l'intervalle F_1F_2 et placé du côté de F_1 .

II. — NORMALE A L'OVALE.

L'ovale étant donnée par l'équation $\lambda\rho + \lambda'\rho' = h$ rapportée à deux foyers F et F' , nous prenons sur la courbe un point I ,

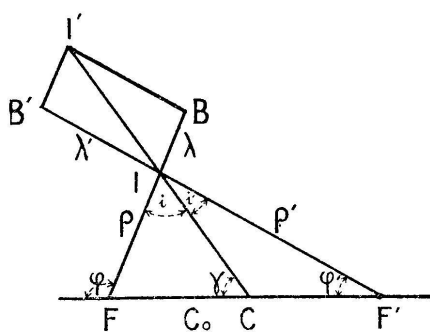


Fig. 4.

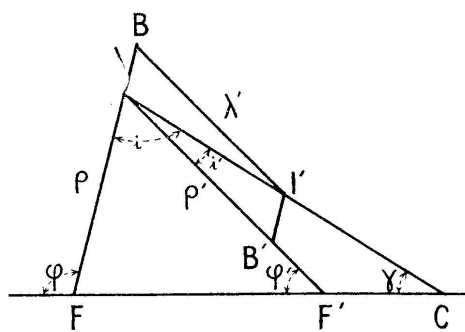


Fig. 5.

nous portons sur les rayons vecteurs FI et $F'I$ des segments $IB = \lambda$ et $IB' = \lambda'$, et nous complétons le parallélogramme $BIB'I'$ (fig. 4 et 5): sa diagonale II' est la normale à l'ovale.

¹ En prenant F_s pour origine, l'équation cartésienne de l'ovale prend une forme où F_sF_1 , F_sF_2 et F_sF_3 interviennent de façon symétrique, se prêtant de façon commode à l'étude de la courbe.

La normale rencontre l'axe FF' en un point C situé entre F et F' si λ et λ' sont de même signe (fig. 4) et en dehors de l'intervalle FF' si λ et λ' sont de signe contraire (fig. 5). Le tableau des équations bipolaires montre que pour l'ovale intérieure, la normale passe entre F_1 et F_2 et que pour l'ovale extérieure, elle rencontre l'axe en des points extérieurs à l'intervalle $F_1 F_2$.

Soient i , i' et γ les angles que fait la normale avec les rayons vecteurs et avec l'axe FF' . Les deux triangles CFI et $CF'I$ nous donnent

$$\frac{CF}{\rho} = \frac{\sin i}{\sin \gamma} \quad \text{et} \quad \frac{CF'}{\rho'} = \frac{\sin i'}{\sin \gamma} .$$

D'où

$$\frac{CF}{CF'} = \frac{\sin i}{\sin i'} \cdot \frac{\rho}{\rho'} .$$

Dans le triangle IBI'

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|} .$$

Donc

$$\frac{CF}{CF'} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|} \cdot \frac{\rho}{\rho'} .$$

Le rapport des segments déterminés sur FF' par la normale à l'ovale est égal au produit du rapport des rayons vecteurs adjacents par un facteur constant.

Réciproquement, si la normale à une courbe détermine sur la droite passant par deux points fixes F et F' deux segments dont le rapport est égal au produit du rapport des deux rayons vecteurs adjacents par un facteur constant, la courbe est une ovale de Descartes. En effet, si

$$\frac{FC}{F'C} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|} \cdot \frac{\rho}{\rho'} ,$$

nous pouvons construire sur les directions des rayons vecteurs un parallélogramme de côtés égaux à λ et λ' .

Si nous connaissons le point d'intersection C d'une normale avec l'axe, nous connaissons le rapport $\rho : \rho'$ et, si nous écrivons l'équation de la courbe sous la forme

$$\left(\lambda \frac{\rho}{\rho'} + \lambda' \right) \rho' = h ,$$

nous pouvons déterminer ρ' et par suite ρ . Alors le point I est connu et CI est la normale cherchée.

Pour trouver l'angle γ de la normale avec l'axe, projetons le contour II'B sur l'axe focal et sur une droite qui lui soit perpendiculaire. Désignant par φ et φ' les angles des rayons vecteurs avec l'axe, nous obtenons

$$\text{II}' \cos \gamma - \lambda \cos \varphi - \lambda' \cos \varphi' = 0, \quad \text{II}' \sin \gamma - \lambda \sin \varphi - \lambda' \sin \varphi' = 0.$$

D'où

$$\text{tg } \gamma = \frac{\lambda \sin \varphi + \lambda' \sin \varphi'}{\lambda \cos \varphi + \lambda' \sin \varphi'}.$$

III. POINTS OU L'OVALE PRÉSENTE UN MAXIMUM OU UN MINIMUM DE COURBURE.

1. — *Sommets de l'ovale.*

Par raison de symétrie, les sommets situés sur l'axe correspondent à un maximum ou à un minimum de courbure.

1. *Construction du centre de courbure relatif à un sommet.* — Si le point I (fig. 4 et 5) se rapproche indéfiniment du sommet A, le point C, intersection de la normale en I avec FF', tend vers une position limite C₀ qui est le centre de courbure en A, puisque par raison de symétrie, ce centre de courbure doit se trouver sur FF' et on a

$$\frac{C_0 F}{C_0 F'} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|} \frac{C_0 A}{C_0 A'}.$$

Le point C₀ divisant FF' dans un rapport donné se détermine par une construction bien connue et cette construction est applicable à l'ellipse ($\lambda = \lambda'$) et à l'hyperbole ($\lambda = -\lambda'$).

2. *Sommets de l'ovale intérieure.* — Quand le point I se déplace sur une ovale intérieure à partir du sommet A₁, voisin du foyer F₁, ρ_1 augmente et l'équation de la courbe $\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 = -h_3$ montre que ρ_2 diminue. Alors $\rho_1 : \rho_2$ augmente, ainsi que CF₁ : CF₂