

# III. Points ou l'ovale présente un maximum ou un minimum DE COURBURE.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

nous pouvons déterminer  $\rho'$  et par suite  $\rho$ . Alors le point I est connu et CI est la normale cherchée.

Pour trouver l'angle  $\gamma$  de la normale avec l'axe, projetons le contour II'B sur l'axe focal et sur une droite qui lui soit perpendiculaire. Désignant par  $\varphi$  et  $\varphi'$  les angles des rayons vecteurs avec l'axe, nous obtenons

$$\text{II}' \cos \gamma - \lambda \cos \varphi - \lambda' \cos \varphi' = 0, \quad \text{II}' \sin \gamma - \lambda \sin \varphi - \lambda' \sin \varphi' = 0.$$

D'où

$$\text{tg } \gamma = \frac{\lambda \sin \varphi + \lambda' \sin \varphi'}{\lambda \cos \varphi + \lambda' \sin \varphi'}.$$

### III. POINTS OU L'OVALE PRÉSENTE UN MAXIMUM OU UN MINIMUM DE COURBURE.

#### 1. — *Sommets de l'ovale.*

Par raison de symétrie, les sommets situés sur l'axe correspondent à un maximum ou à un minimum de courbure.

1. *Construction du centre de courbure relatif à un sommet.* — Si le point I (fig. 4 et 5) se rapproche indéfiniment du sommet A, le point C, intersection de la normale en I avec FF', tend vers une position limite C<sub>0</sub> qui est le centre de courbure en A, puisque par raison de symétrie, ce centre de courbure doit se trouver sur FF' et on a

$$\frac{C_0 F}{C_0 F'} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|} \frac{C_0 A}{C_0 A'}.$$

Le point C<sub>0</sub> divisant FF' dans un rapport donné se détermine par une construction bien connue et cette construction est applicable à l'ellipse ( $\lambda = \lambda'$ ) et à l'hyperbole ( $\lambda = -\lambda'$ ).

2. *Sommets de l'ovale intérieure.* — Quand le point I se déplace sur une ovale intérieure à partir du sommet A<sub>1</sub>, voisin du foyer F<sub>1</sub>,  $\rho_1$  augmente et l'équation de la courbe  $\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 = -h_3$  montre que  $\rho_2$  diminue. Alors  $\rho_1 : \rho_2$  augmente, ainsi que CF<sub>1</sub> : CF<sub>2</sub>

et le point C se rapproche de  $F_2$  et de  $A_2$ . La courbure passe donc par un maximum en  $A_1$ . On verrait de même qu'elle passe par un maximum en  $A_2$ <sup>1</sup>.

3. *Sommets de l'ovale extérieure.* — Considérons l'ovale extérieure comme la transformée de l'ovale intérieure conjuguée en prenant  $F_1$  pour centre d'inversion. Le cercle osculateur en  $A_1$  devient par inversion le cercle osculateur en  $B_1$  et comme le cercle osculateur en  $A_1$  est intérieur à l'ovale intérieure, le cercle osculateur en  $B_1$  est extérieur à l'ovale extérieure. D'autre part, le foyer  $F_1$  est intérieur au cercle osculateur en  $A_1$ , puisque les normales à l'ovale intérieure rencontrent l'axe entre les deux foyers:  $F_1$  est donc intérieur au cercle osculateur en  $B_1$ : en ce sommet la courbe tourne sa concavité vers  $F_1$  et présente un minimum de courbure.

En ce qui concerne le sommet  $B_2$ , il faut distinguer plusieurs cas:

α) Si le foyer  $F_1$  est à l'intérieur du cercle osculateur en  $A_2$ , il est aussi à l'intérieur du cercle osculateur en  $B_2$  et, ce cercle étant extérieur à la courbe, l'ovale extérieure tourne en  $B_2$  sa concavité vers  $F_1$  et présente un minimum de courbure.

β) Si le cercle osculateur en  $A_2$  passe par  $F_1$ , il se transforme en une droite, et l'ovale extérieure présente au sommet  $B_2$  un point méplat.

γ) Enfin, si le foyer  $F_1$  est extérieur au cercle osculateur en  $A_2$ , il est aussi extérieur au cercle osculateur en  $B_2$  et, ce cercle étant extérieur à la courbe, l'ovale extérieure tourne en  $B_2$  sa convexité vers  $F_1$  et présente un maximum de courbure<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> On peut obtenir le même résultat d'une façon plus classique, mais qui exige quelques calculs. Soit un cercle de rayon  $R$  tangent au sommet de l'ovale. Prenons pour axes de coordonnées l'axe et la tangente au sommet. Les coordonnées d'un point  $P$  du cercle sont  $x = R(1 - \cos \varphi)$  et  $y = R \sin \varphi$ . Dans  $x$  et  $y$  remplaçons  $\cos \varphi$  et  $\sin \varphi$  par leurs développements en série en fonction de  $\varphi$  et négligeons les puissances supérieures à la quatrième. Calculons  $F_1P$  et  $F_2P$ . Portant leurs valeurs dans le premier membre de l'équation de l'ovale, nous obtenons une expression de la forme  $p\varphi^2 + q\varphi^4$ . Écrivons que le coefficient de  $\varphi^2$  est nul: l'équation  $p = 0$  nous fait connaître le rayon  $R_0$  du cercle osculateur. Le signe du coefficient de  $\varphi^4$ , quand on y remplace  $R$  par  $R_0$ , permet de savoir si la courbure au sommet envisagé est maxima ou minima.

<sup>2</sup> Dans ce dernier cas, le foyer  $F_1$  est intérieur au cercle osculateur en  $A_1$  et extérieur au cercle osculateur en  $A_2$ . Il y a donc sur chacune des moitiés de l'ovale intérieure entre  $A_1$  et  $A_2$  un point tel que le cercle osculateur en ce point passe par  $F_1$ , et le cercle osculateur au point correspondant de l'ovale extérieure est une droite: ce point homologue est un point d'inflexion.

Il y a entre les valeurs de  $\rho_1, \rho_2, i_1, i_2$  qui correspondent aux points d'inflexion une

4. *Condition pour que l'ovale extérieure soit une courbe convexe.* — Nous avons vu plus haut comment la forme d'une équation bipolaire nous permet de reconnaître s'il s'agit d'une ovale intérieure ou d'une ovale extérieure. Cherchons la condition pour qu'une ovale extérieure soit une courbe convexe. Des considérations d'optique vont nous guider.

La relation  $\lambda \sin i = |\lambda'| \sin i'$  nous montre que, si nous envisageons l'ovale comme la méridienne d'un dioptré pour lequel le premier et le second milieu ont des indices respectivement égaux à  $\lambda$  et  $\lambda'$  et si nous supposons un point lumineux placé en  $F$  dans le premier milieu, les rayons réfractés forment un faisceau homocentrique de centre  $F'$ . Supposons l'ovale rapportée à ses foyers intérieurs et prenons  $F_2$  comme point-objet. Si l'ovale possède en  $B_2$  un point méplat, les rayons lumineux venant de  $F_2$  sont réfractés au voisinage de  $B_2$  comme ils le seraient sous l'incidence normale par un dioptré plan, et on a  $\lambda_2 F_1 B_1 = \lambda_1 F_2 B_2$  ou  $\lambda_2 b_1 = \lambda_1 b_2'$ . Si la courbe tourne en  $B_2$  sa concavité vers  $F_2$ , l'image  $F_1$  se rapproche de  $B_2$ , et on a  $\lambda_2 b_2 < \lambda_1 b_1$  : c'est la condition pour que l'ovale extérieure soit une courbe convexe.

2. — *Points situés en dehors de l'axe et présentant un maximum ou un minimum de courbure.*

Soit  $M$  un des points de contact de la circonférence menée par  $F_1$  et  $F_2$  et bitangente à l'ovale. En ce point  $M$ , l'angle  $F_1 M F_2$ , formé par les rayons vecteurs, passe par un maximum. Il est égal à  $(i_1 + i_2)$  pour l'ovale intérieure (fig. 6) et à  $(i_1 - i_2)$  pour l'ovale extérieure. Nous avons donc, en  $M$ ,  $d(i_1 \pm i_2) = 0$ . D'autre part, de la relation

$$\lambda_1 \sin i_1 = \lambda_2 \sin i_2, \quad \text{nous tirons} \quad \lambda_1 \cos i_1 di_1 = \lambda_2 \cos i_2 di_2.$$

---

relation simple qu'on trouve aisément par des considérations d'optique. Dans le plan de la figure, les rayons lumineux émanés de  $F_2$  sont réfractés en ces points par un dioptré ayant l'ovale pour méridienne comme ils le seraient par un dioptré plan osculateur. La relation qui détermine la position de la focale tangentielle est

$$\frac{\lambda_1 \cos^2 i_1}{\rho_1} = \frac{\lambda_2 \cos^2 i_2}{\rho_2}.$$

Par suite  $d(i_1 \pm i_2) = 0$  équivaut à

$$\left(1 \pm \frac{\lambda_1 \cos i_1}{\lambda_2 \cos i_2}\right) di_1 = 0 .$$

Le facteur entre parenthèses ne pouvant s'annuler,  $di_1 = 0$  et  $di_2 = 0$ ; alors  $i_1$  et  $i_2$  passent en M par un maximum. Soit MJ la normale.

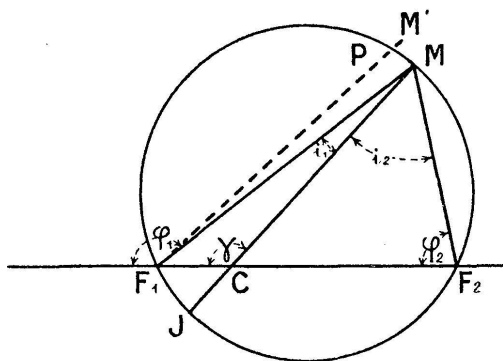


Fig. 6.

Prenons sur l'ovale un point  $M'$  infiniment voisin de  $M$ ; la droite  $F_1M'$  prolongée rencontre la circonférence au point  $P$ . Les angles inscrits  $F_1PJ$  et  $F_1MJ$  sont égaux. La normale  $M'$ , faisant avec  $F_1M'$  un angle égal à  $i_1$  au second ordre près, puisque  $i_1$  est un maximum, est parallèle à  $PJ$  et, puisque  $M'P$  est du second ordre, cette normale passe, au second ordre près, par le point  $J$ .  $J$  est par conséquent un point de rebroussement de la développée et en  $M$  la courbure de l'ovale passe par un minimum (pour l'ovale intérieure) par un maximum (pour l'ovale extérieure). Nous voyons donc que le cercle tangent en  $M$  ayant un rayon égal à la moitié du rayon de courbure en ce point passe par les deux foyers intérieurs. Entre les angles  $i_1$  et  $i_2$ , les rayons vecteurs  $\rho_1$  et  $\rho_2$  et le rayon de courbure  $R$  nous avons en  $M$  les relations

$$2R = \frac{\rho_1}{\cos i_1} = \frac{\rho_2}{\cos i_2} .$$

En tout point de l'ovale  $\gamma = \varphi_1 - i_1 = \varphi_2 + i_2$  d'où

$$d\gamma = d\varphi_1 - di_1 = d\varphi_2 + di_2 .$$

En  $M$  on a  $d\gamma = d\varphi_1 = d\varphi_2$ .