

# SUR L'EMPLOI D'UNE TROISIÈME COORDONNÉE EN THÉORIE DES SURFACES

Autor(en): **Becqué, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-22599>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR L'EMPLOI D'UNE TROISIÈME COORDONNÉE EN THÉORIE DES SURFACES

PAR

J. BECQUÉ (Carcassonne).

---

Aux coordonnées curvilignes  $u_1, u_2$ , sur une surface  $S$ , on est conduit à adjoindre une troisième,  $u_3$ , par suite de l'emploi du trièdre tangent en un point  $M$ , défini par

$$M_1 = \frac{\partial M}{\partial u_1}, \quad M_2 = \frac{\partial M}{\partial u_2}, \quad M_3 = \frac{\partial M}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial M}{\partial u_2};$$

$S$  étant considérée comme surface coordonnée des  $u_1, u_2$ , on a  $u_3 = \text{conste}$  sur  $S$ , mais ne nous occupant que de  $S$  et non de la famille des surfaces coordonnées nous pouvons définir  $u_3$  par

$$\frac{\partial M}{\partial u_3} = M_3 = \frac{\partial M}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial M}{\partial u_2}.$$

On est alors amené à chercher la signification des dérivées partielles en  $u_3$  des éléments les plus simples; on trouve ainsi que *les coefficients de la deuxième forme fondamentale sont, au facteur  $-\frac{1}{2}$  près, les dérivées partielles, en  $u_3$ , des coefficients correspondants du  $ds^2$ , que la courbure moyenne est, au facteur  $\frac{1}{2}$  près, la dérivée partielle en  $u_3$  de  $\frac{1}{H}$* . L'emploi des trois coordonnées donne aussi une interprétation remarquable des symboles de Christoffel.

I. — On sait que

$$E = \left(\frac{\partial M}{\partial u_1}\right)^2, \quad F = \frac{\partial M}{\partial u_1} \times \frac{\partial M}{\partial u_2}, \quad G = \left(\frac{\partial M}{\partial u_2}\right)^2;$$

$$D = \frac{\partial^2 M}{\partial u_1^2} \times \left(\frac{\partial M}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial M}{\partial u_2}\right), \quad D' = \frac{\partial^2 M}{\partial u_1 \partial u_2} \times \left(\frac{\partial M}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial M}{\partial u_2}\right),$$

$$D'' = \frac{\partial^2 M}{\partial u_2^2} \times \left(\frac{\partial M}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial M}{\partial u_2}\right).$$

Posons, pour abrégé

$$M_i = \frac{\partial M}{\partial u_i}, \quad M_{ij} = \frac{\partial^2 M}{\partial u_i \partial u_j}, \quad g_{\mu\nu} = M_\mu \times M_\nu, \quad (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}).$$

En vertu de la commutativité des dérivations partielles

$$M_{ij} = \frac{\partial M_i}{\partial u_j} = \frac{\partial M_j}{\partial u_i} = M_{ji}; \quad (1)$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u_3} &= \left(\frac{\partial}{\partial u_3} M_\mu\right) \times M_\nu + M_\mu \times \frac{\partial}{\partial u_3} M_\nu = M_\nu \times \frac{\partial}{\partial u_\mu} M_3 + M_\mu \times \frac{\partial}{\partial u_\nu} M_3, \\ &= M_\nu \times \frac{\partial}{\partial u_\mu} (M_1 \wedge M_2) + M_\mu \times \frac{\partial}{\partial u_\nu} (M_1 \wedge M_2), \\ &= M_\nu \times M_{1\mu} \wedge M_2 + M_\mu \times M_{1\nu} \wedge M_2 + M_\nu \times M_1 \wedge M_{2\mu} \\ &\quad + M_\mu \times M_1 \wedge M_{2\nu}, \\ &= - (M_{1\mu} \times M_\nu \wedge M_2 + M_{1\nu} \times M_\mu \wedge M_2 + M_{2\mu} \times M_1 \wedge M_\nu \\ &\quad + M_{2\nu} \times M_1 \wedge M_\mu). \end{aligned}$$

En observant que

$$g_{11} = E, \quad g_{12} = g_{21} = F, \quad g_{22} = G$$

on a

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u_3} = D, \quad -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial u_3} = D', \quad -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u_3} = D''.$$

II. — Ayant:

$$a) \quad g_{33} = \bar{M}_3^2 = (M_1 \wedge M_2) \times (M_1 \wedge M_2) = g_{11} g_{22} - g_{12}^2,$$

donc

$$H = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{g_{33}},$$

$$b) \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \times c) b - (a \times b) c;$$

c) La courbure moyenne en M a pour valeur

$$\rho_m = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{ED'' + GD - 2FD'}{2H^3},$$

d)  $M_i \times M_3 = 0$  si  $i = 1, 2$ .

Donc

$$M_i \times \frac{\partial M_3}{\partial u_\alpha} = -M_3 \times \frac{\partial M_i}{\partial u_\alpha} = -M_3 \times M_{i\alpha} = -M_{i\alpha} \times (M_1 \wedge M_2),$$

et par suite

$$M_1 \times M_{13} = -M_{11} \times (M_1 \wedge M_2) = -D$$

$$M_1 \times M_{23} = M_2 \times M_{13} = -M_{12} \times (M_1 \wedge M_2) = -D'$$

$$M_2 \times M_{23} = -M_{22} \times (M_1 \wedge M_2) = -D''.$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{33}}{\partial u_3} &= -2(M_{13} \times M_3 \wedge M_2 + M_{23} \times M_1 \wedge M_3), \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial g_{33}}{\partial u_3} &= M_{13}[(M_2 \times M_1)M_2 - (M_2 \times M_2)M_1] \\ &\quad + M_{23}[(M_1 \times M_2)M_1 - (M_1 \times M_1)M_2], \\ &= g_{12}(M_2 \times M_{13} + M_1 \times M_{23}) - g_{11}M_2 \times M_{23} - g_{22}M_1 \times M_{13}, \\ &= -2FD' + ED'' + GD = 2H^3 \rho_m, \end{aligned}$$

donc

$$\rho_m = -\frac{1}{2H^2} \frac{\partial H}{\partial u_3} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u_3} \frac{1}{H}.$$

III. — Soit  $T^*$  ( $M^1, M^2, M^3$ ) le trièdre supplémentaire du trièdre tangent  $T$  ( $M_1, M_2, M_3$ ).

Posant

$$g^{\mu\nu} = M^\mu \times M^\nu, \quad \text{on a} \quad M_\mu = g_{\mu\nu} M^\nu, \quad M^\mu = g^{\mu\nu} M_\nu,$$

$$M^\mu \times M_\nu = g^{\mu\alpha} g_{\nu\alpha} = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu, \\ 1 & \mu = \nu. \end{cases}$$

Introduisons les symboles à 3 indices de Christoffel (écrits suivant la notation de M. R. Lagrange).

Les symboles de première espèce sont

$$\begin{aligned} \left[ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right] &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial u_\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial u_\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial u_\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2} (M_\nu \times M_{\alpha\mu} + M_{\nu\mu} \times M_\alpha + M_\alpha \times M_{\mu\nu} + M_{\alpha\nu} \times M_\mu \\ &\quad - M_\mu \times M_{\nu\alpha} - M_{\mu\alpha} \times M_\nu) \end{aligned}$$

d'où, compte tenu de (1),

$$\left[ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right] = M_\alpha \times M_{\mu\nu} .$$

Ce sont les projections de  $M_{\mu\nu}$  sur T, ou composantes sur T\*. Les symboles de seconde espèce sont

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = g^{\alpha\varepsilon} \left[ \begin{matrix} \varepsilon \\ \mu\nu \end{matrix} \right] ,$$

Multipliant scalairement  $M^\alpha = g^{\alpha\varepsilon} M_\varepsilon$  par  $M_{\mu\nu}$ , on a :

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} = M^\alpha \times M_{\mu\nu} .$$

Ce sont les composantes de  $M_{\mu\nu}$  sur T, ou projections sur T\*.

On a alors des expressions simples pour  $d^2M$ , dans lesquelles on tiendra compte de  $du_3 = 0$  sur S,

$$d^2M = d^2u_\mu \cdot M_\mu + du_\mu du_\nu \cdot M_{\mu\nu} , \quad \text{ayant} \quad dM = du_\mu \cdot M_\mu ,$$

ou, mettant en évidence les composantes sur T :

$$d^2M = (d^2M \times M^\varepsilon) \cdot M_\varepsilon = \left( d^2u_\varepsilon + \left\{ \begin{matrix} \varepsilon \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} du_\mu du_\nu \right) \cdot M_\varepsilon .$$

Une application est l'obtention des équations des géodésiques:  $d^2M$  devant être normal à S doit être orthogonal à  $M_1$  et  $M_2$ , d'où

$$d^2u_\varepsilon + \left\{ \begin{matrix} \varepsilon \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} du_\mu du_\nu = 0 , \quad \varepsilon = 1, 2 .$$