

SUR LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES

Autor(en): **Stoyanoff, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1929)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-22601>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

SUR
LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS
DIFFÉRENTIELLES

PAR

A. STOYANOFF (Sofia).

PROBLÈME. — *Etant donnée une « fonction différentielle », d'ordre n,*

$$F_n(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) ,$$

déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit la dérivée exacte d'une fonction différentielle, d'ordre (n — 1),

$$\Phi_{n-1}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

*et déterminer celle-ci*¹.

Ce problème a été traité par plusieurs mathématiciens, parmi lesquels il faut citer Euler, Condorcet, Lexell, Lagrange, Poisson, Sarrus, Joachimsthal, Raabe, J. Bertrand. C'est Euler qui le premier a montré que la condition nécessaire et suffisante est

$$\nabla_n F_n \equiv 0 ,$$

en désignant pour abrégier par $\nabla_n \varphi$ l'opérateur suivant²

$$\nabla_n \varphi = \sum_{k=0}^n (-1)^k D^k (\Delta_k \varphi) .$$

¹ y est considéré comme fonction de x ; $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$.

² Nous avons posé

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial y^{(k)}} , \quad \Delta_0 = \frac{\partial}{\partial y} , \quad \Delta = \frac{\partial}{\partial x} , \quad D^k = \frac{d^k}{dx^k} .$$

On arrive facilement à cette solution, par le calcul des variations, en exprimant que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} F_n(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$$

ne dépend pas de la forme de la fonction $y(x)$.

Malgré son élégance, cette méthode se prête mal à la détermination *effective* de la fonction Φ_{n-1} . Dans un mémoire paru dans le *Journal de math. pures et appliquées*, t. 14, J. Bertrand a donné une méthode très commode pour le calcul de Φ_{n-1} . Pour mieux comprendre cette méthode, nous allons traiter un cas particulier.

Soit

$$F_3 = 2x + y^2 + (2xy - 1)y' + xy'' + x^2y''' .$$

En remarquant que

$$x^2y''' = D(x^2y'') - 2xy'' ,$$

F_3 peut se mettre sous la forme

$$F_3 = D(x^2y'') + F_2 \quad \text{avec} \quad F_2 = 2x + y^2 + (2xy - 1)y' - xy'' .$$

On a de même

$$F_2 = D(-xy') + F_1 \quad \text{avec} \quad F_1 = 2x + y^2 + 2xyy' ,$$

$$F_1 = D(xy^2) + F_0 \quad \text{avec} \quad F_0 = 2x = D(x^2) .$$

Par conséquent,

$$F_3 = D(x^2y'' - xy' + xy^2 + x^2) = D\Phi_2 .$$

Dans l'introduction de son mémoire, Bertrand écrit: « Ma méthode diffère notablement de celle d'Euler et il faudrait des calculs compliqués pour vérifier directement leur concordance... »

Nous nous proposons de montrer qu'on peut par des calculs *très simples* et élémentaires arriver à la condition d'Euler, tout en suivant la méthode de Bertrand.

THÉORÈME. — La condition *nécessaire et suffisante* pour que la fonction différentielle, d'ordre n ,

$$F_n(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

soit la dérivée exacte d'une certaine fonction différentielle, d'ordre $(n - 1)$,

$$\Phi_{n-1}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) ,$$

est que l'expression

$$\begin{aligned} \nabla_n F_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k D^k (\Delta_k F_n) &= \Delta_0 F_n - D(\Delta_1 F_n) + D^2(\Delta_2 F_n) \\ &- \dots + (-1)^n D^n (\Delta_n F_n) \end{aligned}$$

soit identiquement nulle.

A. Nous allons démontrer que si le théorème est vrai pour les fonctions d'ordre n , il le sera également pour celles d'ordre $(n + 1)$.

§ 1. On remarque immédiatement que F_{n+1} est nécessairement de la forme

$$F_{n+1} = P_n + Q_n y^{(n+1)} ,$$

P_n et Q_n étant des fonctions différentielles d'ordre n .

§ 2. Désignons par \bar{F}_n la fonction, d'ordre n ,

$$\int Q_n dy^{(n)} .$$

On a

$$\Delta_n \bar{F}_n = Q_n \quad \text{ce qui est égal à} \quad \Delta_{n+1} F_{n+1} .$$

Comme on a

$$D\bar{F}_n = \Delta\bar{F}_n + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \bar{F}_n \cdot y^{(k+1)} + Q_n y^{(n+1)} ,$$

on voit immédiatement que

$$F_{n+1} = D\bar{F}_n + F_n ,$$

F_n désignant la fonction d'ordre n suivante

$$F_n = P_n - \Delta\bar{F}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \bar{F}_n \cdot y^{(k+1)} .$$

§ 3. Calculons $\nabla_n F_n$. On a ¹

$$\begin{aligned} \nabla_n F_n &= \nabla_n F_{n+1} - \nabla_n (D\bar{F}_n) = \nabla_n F_{n+1} - \Delta_0 (D\bar{F}_n) - \sum_{k=1}^n (-1)^k D^k (\Delta_k D\bar{F}_n) \\ &= \nabla_n F_{n+1} - D(\Delta_0 \bar{F}_n) + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} D^k (D\Delta_k \bar{F}_n + \Delta_{k-1} \bar{F}_n) \\ &= \nabla_n F_{n+1} + (-1)^{n+1} D^{n+1} (\Delta_n \bar{F}_n) \\ &= \nabla_n F_{n+1} + (-1)^{n+1} D^{n+1} (\Delta_{n+1} F_{n+1}) = \nabla_{n+1} F_{n+1}. \end{aligned}$$

§ 4. Bref, on a

$$F_{n+1} = D\bar{F}_n + F_n \quad \text{et} \quad \nabla_{n+1} F_{n+1} = \nabla_n F_n.$$

Par conséquent, si F_{n+1} est une dérivée exacte, F_n l'est également; mais alors, par hypothèse, $\nabla_n F_n \equiv 0$; par conséquent $\nabla_{n+1} F_{n+1} \equiv 0$.

Inversement, si $\nabla_{n+1} F_{n+1} \equiv 0$, $\nabla_n F_n$ est aussi identiquement nul; mais alors, par hypothèse, F_n est une dérivée exacte; par conséquent F_{n+1} est également une dérivée exacte.

B. Comme le théorème est vrai pour $n = 0$, il le sera pour toutes les valeurs de n .

¹ Puisque

$$\begin{aligned} \Delta_k (D\varphi) &= \Delta_k (\Delta\varphi + \Delta_0 \varphi \cdot y' + \dots + \Delta_{k-1} \varphi \cdot y^{(k)} + \dots) \\ &= \Delta_{k-1} \varphi + [\Delta (\Delta_k \varphi) + \Delta_0 (\Delta_k \varphi) y' + \dots + \Delta_{k-1} (\Delta_k \varphi) y^{(k)} + \dots] \\ &= \Delta_{k-1} \varphi + D(\Delta_k \varphi); \end{aligned}$$

on a de même $\Delta_0 (D\varphi) = D(\Delta_0 \varphi)$.