SUR LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES

SUR
LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES

PAR

A. STOYANOFF (Sofia).

PROBLÈME. — *Etant donnée une « fonction différentielle », d'ordre* n,

$$F_n(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) ,$$

déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit la dérivée exacte d'une fonction différentielle, d'ordre $(n-1)$,

$$\Phi_{n-1}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

et déterminer celle-ci [1].

Ce problème a été traité par plusieurs mathématiciens, parmi lesquels il faut citer Euler, Condorcet, Lexell, Lagrange, Poisson, Sarrus, Joachimsthal, Raabe, J. Bertrand. C'est Euler qui le premier a montré que la condition nécessaire et suffisante est

$$\nabla_n F_n \equiv 0 ,$$

en désignant pour abréger par $\nabla_n \varphi$ l'opérateur suivant [2]

$$\nabla_n \varphi = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k (\Delta_k \varphi) .$$

---

[1] y est considéré comme fonction de x; $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$.

[2] Nous avons posé

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial y^{(k)}}, \qquad \Delta_0 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \Delta = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad D^k = \frac{d^k}{dx^k} .$$

On arrive facilement à cette solution, par le calcul des variations, en exprimant que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} F_n(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

ne dépend pas de la forme de la fonction $y(x)$.

Malgré son élégance, cette méthode se prête mal à la détermination *effective* de la fonction Φ_{n-1}. Dans un mémoire paru dans le *Journal de math. pures et appliquées*, t. 14, J. Bertrand a donné une méthode très commode pour le calcul de Φ_{n-1}. Pour mieux comprendre cette méthode, nous allons traiter un cas particulier.

Soit

$$F_3 = 2x + y^2 + (2xy - 1)y' + xy'' + x^2y''' .$$

En remarquant que

$$x^2y''' = D(x^2y'') - 2xy'' ,$$

F_3 peut se mettre sous la forme

$$F_3 = D(x^2y'') + F_2 \quad \text{avec} \quad F_2 = 2x + y^2 + (2xy - 1)y' - xy'' .$$

On a de même

$$F_2 = D(-xy') + F_1 \quad \text{avec} \quad F_1 = 2x + y^2 + 2xyy' ,$$
$$F_1 = D(xy^2) + F_0 \quad \text{avec} \quad F_0 = 2x = D(x^2) .$$

Par conséquent,

$$F_3 = D(x^2y'' - xy' + xy^2 + x^2) = D\Phi_2 .$$

Dans l'introduction de son mémoire, Bertrand écrit: « Ma méthode diffère notablement de celle d'Euler et il faudrait des calculs compliqués pour vérifier directement leur concordance... »

Nous nous proposons de montrer qu'on peut par des calculs *très simples* et élémentaires arriver à la condition d'Euler, tout en suivant la méthode de Bertrand.

THÉORÈME. — La condition *nécessaire et suffisante* pour que la fonction différentielle, d'ordre n,

$$F_n(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$$

soit la dérivée exacte d'une certaine fonction différentielle, d'ordre $(n-1)$,

$$\Phi_{n-1}(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

est que l'expression

$$\nabla_n F_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k(\Delta_k F_n) = \Delta_0 F_n - D(\Delta_1 F_n) + D^2(\Delta_2 F_n) - \ldots + (-1)^n D^n(\Delta_n F_n)$$

soit identiquement nulle.

A. Nous allons démontrer que si le théorème est vrai pour les fonctions d'ordre n, il le sera également pour celles d'ordre $(n+1)$.

§ 1. On remarque immédiatement que F_{n+1} est nécessairement de la forme

$$F_{n+1} = P_n + Q_n y^{(n+1)},$$

P_n et Q_n étant des fonctions différentielles d'ordre n.

§ 2. Désignons par $\overline{F}_n$ la fonction, d'ordre n,

$$\int Q_n \, dy^{(n)}.$$

On a

$$\Delta_n \overline{F}_n = Q_n \qquad \text{ce qui est égal à} \qquad \Delta_{n+1} F_{n+1}.$$

Comme on a

$$D\overline{F}_n = \Delta \overline{F}_n + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \overline{F}_n \cdot y^{(k+1)} + Q_n y^{(n+1)},$$

on voit immédiatement que

$$F_{n+1} = D\overline{F}_n + F_n,$$

F_n désignant la fonction d'ordre n suivante

$$F_n = P_n - \Delta \overline{F}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \overline{F}_n \cdot y^{(k+1)}.$$

§ 3. Calculons $\nabla_n F_n$. On a [1]

$$\nabla_n F_n = \nabla_n F_{n+1} - \nabla_n(D\overline{F}_n) = \nabla_n F_{n+1} - \Delta_0(D\overline{F}_n) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k D^k(\Delta_k D\overline{F}_n)$$

$$= \nabla_n F_{n+1} - D(\Delta_0\overline{F}_n) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} D^k(D\Delta_k\overline{F}_n + \Delta_{k-1}\overline{F}_n)$$

$$= \nabla_n F_{n+1} + (-1)^{n+1} D^{n+1}(\Delta_n\overline{F}_n)$$

$$= \nabla_n F_{n+1} + (-1)^{n+1} D^{n+1}(\Delta_{n+1} F_{n+1}) = \nabla_{n+1} F_{n+1} .$$

§ 4. Bref, on a

$$F_{n+1} = D\overline{F}_n + F_n \quad \text{et} \quad \nabla_{n+1} F_{n+1} = \nabla_n F_n .$$

Par conséquent, *si* F_{n+1} *est une dérivée exacte*, F_n l'est également; mais alors, par hypothèse, $\nabla_n F_n \equiv 0$; *par conséquent* $\nabla_{n+1} F_{n+1} \equiv 0$.

Inversement, *si* $\nabla_{n+1} F_{n+1} \equiv 0$, $\nabla_n F_n$ est aussi identiquement nul; mais alors, par hypothèse, F_n est une dérivée exacte; *par conséquent* F_{n+1} *est également une dérivée exacte.*

B. Comme le théorème est vrai pour $n = 0$, il le sera pour toutes les valeurs de n.

---

[1] Puisque

$$\Delta_k(D\varphi) = \Delta_k(\Delta\varphi + \Delta_0\varphi \cdot y' + \ldots + \Delta_{k-1}\varphi \cdot y^{(k)} + \ldots)$$

$$= \Delta_{k-1}\varphi + [\Delta(\Delta_k\varphi) + \Delta_0(\Delta_k\varphi)y' + \ldots + \Delta_{k-1}(\Delta_k\varphi)y^{(k)} + \ldots]$$

$$= \Delta_{k-1}\varphi + D(\Delta_k\varphi) \;;$$

on a de même $\Delta_0(D\varphi) = D(\Delta_0\varphi)$.