David Hilbert. — Gesammelte Abhandlungen. Erster Band: Zahlentheorie. — Un vol. gr. in-8° de xiv-540 pages. Prix : RM. 48, Julius Springer. Berlin, 1932.

elle qui débute par les équations de Maxwell. Les ondes sont bientôt considérées en milieu ionisé, compte tenu, ou non tenu, des chocs moléculaires. Une première théorie de leur propagation dans l'atmosphère est fort analogue, ce qui est tout naturel, à celle de la réfraction astronomique. Et, dans les deux cas, nous n'avons, pour les couches d'air, que des constitutions présumées.

Ceci nous fait passer à la troisième Partie en laquelle on commence par une propagation affranchie, cette fois, autant que possible, d'hypothèses concernant la conductibilité en haute atmosphère. A signaler une application de la notion de *vitesse de groupe* dans ses relations avec la densité ionique. D'après Nagaoka, la couche ionisée peut présenter des *plissements locaux* comme dans les vagues de vent. C'est un grand obstacle aux communications sans fil. Les ondes courtes exigent qu'on s'occupe de leur propagation dans la stratosphère. Il existe aussi de remarquables équations différentielles de la trajectoire d'un rayon électromagnétique dans différentes hypothèses (Kenrick et Jen) sur la variation de l'indice de réfraction avec l'altitude. A la partie inférieure d'une couche, dite couche d'Heaviside, les rayons électromagnétiques peuvent subir une sorte de réflexion totale. Ceci peut engendrer des zones de silence. Dans une théorie de Ponte et Rocard (1928) s'introduit la notion de *structure* de la couche ionisée. Enfin nous arrivons à la question capitale des signaux multiples, signaux de circumpropagation faisant le tour de la Terre. Et ce n'est encore rien à côté des *échos cosmiques* qui, d'après Störmer, se produisent sur des nuées corpusculaires certainement plus éloignées de nous que la Lune. Ceci est bien l'une des plus grandes merveilles réalisées par ondes hertziennes. Elle commence à donner un corps à la radiotélégraphie interplanétaire, encore qu'il soit bien improbable que nous trouvions jamais des partenaires pour nous répondre. Mais enfin, le radiogramme pourrait être lancé, probablement sur ces ondes courtes surtout étudiées ici et qui remplaceraient des signaux lumineux auxquels personne n'a jamais songé sérieusement.

La bibliographie placée à la fin du volume comprend vingt pages et une foule de noms illustres. A l'époque radioélectrique où nous sommes, que de perfectionnements on peut prévoir grâce à l'œuvre si étendue et si profonde de M. Paul Labat. A. Buhl (Toulouse).

David Hilbert. — **Gesammelte Abhandlungen.** Erster Band: Zahlentheorie. — Un vol. gr. in-8° de xiv-540 pages. Prix : RM. 48, Julius Springer. Berlin, 1932.

Les œuvres de David Hilbert ! Magnifique monument que le génie élève, pour ainsi dire, à lui-même. Quatre volumes sont prévus et le premier, comme tout ce qui a trait à la Théorie des Nombres, n'est peut-être pas le plus accessible mais il se rapporte cependant beaucoup à la jeunesse de l'auteur. On peut donc espérer qu'il orientera de jeunes esprits. L'impression globale est celle que donnent les œuvres de Riemann ou de Ch. Hermite mais, bien entendu, dans le sens d'un prolongement. Il nous paraît absolument impossible de faire ici une véritable critique analytique du volume; ce serait recommencer ce qu'a fort bien fait M. Helmut Hasse en huit pages terminales réévoquant Gauss, Dirichlet, Kummer, Galois, ... et d'admirables conceptions telles celles des groupes d'idéaux. Mais ici nous ne disposons même pas de huit pages.

Indiquons au moins les titres des mémoires rassemblés:

1. Ueber die Transzendenz der Zahlen e und π (1893, 4 pages).
2. Zwei neue Beweise für die Zerlegbarkeit der Zahlen eines Körpers in Primideale (1894, 1 page).
3. Ueber die Zerlegung der Ideale eines Zahlkörpers in Primideale (1894, 7 pages).
4. Grundzüge einer Theorie des Galoisschen Zahlkörpers (1894, 11 pages).
5. Ueber den Dirichletschen biquadratischen Zahlkörper (1894, 35 pages).
6. Ein neuer Beweis des Kroneckerschen Fundamentalsatzes über Abelsche Zahlkörper (1896, 10 pages).
7. Die Theorie der algebraischen Zahlkörper (1897, 300 pages).
8. Ueber die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper (1899, 6 pages).
9. Ueber die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers (1899, 112 pages).
10. Ueber die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper (1898, 27 pages).
11. Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen. Waringsches Problem (1909, 18 pages).

De cette simple énumération ressort d'abord la rapidité ou la continuité de l'inspiration. A peu près tout a été conçu et publié en six ans et un terrain réputé si aride n'a certainement pas dû faire cet effet à M. David Hilbert.

Le mémoire principal est évidemment celui qui porte le numéro 7. Il y est d'abord question de l'opinion de Legendre quant à la véritable passion que montrait Euler pour l'Arithmétique supérieure. Gauss parla d'un attrait magique. Kronecker écrivit: Le Bon Dieu créa le Nombre entier, tout le reste est œuvre humaine ! On cite de telles opinions avec grand plaisir, à une époque où l'idéalisme renaît, tout au moins pour les esprits supérieurs. Et si, au-delà du domaine des entiers ordinaires, on a créé les *idéaux*, ce n'est peut-être pas par une coïncidence purement terminologique.

On nous permettra aussi de rappeler que le grand travail dont il s'agit a été traduit en français dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* par MM. A. Lévy et Th. Got, avec Notes de Georges Humbert (1909, 1910, 1911). Le regretté Eugène Cosserat qui, à l'époque indiquée, était Secrétaire de nos *Annales* n'a pas laissé passer l'occasion de vulgariser, en France, les pensées maîtresses de David Hilbert.

Faut-il encore rappeler qu'ici un entier algébrique ou, tout simplement, un *entier* est une racine d'équation algébrique, à coefficients rationnels, que ces entiers forment des *corps* puis précisément ces *idéaux* à propriétés de groupes linéaires. Bien que, dans ces préliminaires, il ne soit pas explicitement question de mécanique quantique, ce qui ne pouvait être en 1897, il est bien certain que ce serait une excellente chose, pour une première étude de cette mécanique, que d'être pénétré du texte hilbertien. Et combien tout ceci conduirait aisément à l'espace hilbertien et aux formes d'Hermite. Les corps de Galois, leur structure, les idéaux premiers, les corps quadratiques avec leur ingénieux symbolisme, les restes quadratiques, les classes d'idéaux conduisant aux recherches de Dirichlet et de Dedekind, le corps des racines de l'unité, la subdivision des corps cycliques en corps de Kummer, les idéaux ramifiés, l'intervention des nombres de Bernoulli et de la fonction dzèta de Riemann, le théorème négatif de Fermat sont les points les plus saillants d'une exposition qui est toujours un modèle du genre.

Dans le mémoire 9, je signalerai surtout l'emploi d'*opérateurs*, notamment quant aux idéaux A inchangés par un opérateur S, soit SA = A. Cela rappelle encore les groupes et les opérateurs hermitiques. Réétudier tout Hilbert serait œuvre d'actualité; c'est pourquoi la publication de ce premier volume apparaît aujourd'hui comme étant de la plus haute importance. Nous lui souhaitons beaucoup de lecteurs puisqu'il peut indéniablement former beaucoup de disciples. A. Buhl (Toulouse).

Harris Hancock. — **Foundations of the Theory of Algebric Numbers.** Volume II: The general Theory. — Un vol. in-8° de xxvi-654 pages. Prix: $8.00. The Macmillan Company. New-York, 1932.

L'Enseignement mathématique a déjà rendu compte du premier volume de ce grand ouvrage (voir t. 30, 1931, p. 302). Le tome II, dédié aussi à la mémoire de Mr. et Mrs. Charles Phelps Taft, ne suscitera pas moins d'admiration que le tome premier. Il est particulièrement heureux qu'une telle publication soit contemporaine de celle des Œuvres de David Hilbert. L'analyse hilbertienne ne s'imite pas facilement; elle a même dû paraître inféconde à beaucoup d'esprits. La traduction toulousaine dont il était question tout à l'heure, bien que faite au pays de Fermat, n'a, que je sache, suscité aucun grand travail. Les Charles Hermite, les Georges Humbert se sont éteints sans laisser vraiment de grands successeurs qui auraient pu travailler l'Arithmétique de concert avec Hilbert. C'est pourquoi le mérite de M. Harris Hancock est indiscutable. Il infuse une vie nouvelle à cette Arithmétique supérieure, selon les traditions de Kronecker, Dedekind, Hilbert et ce d'une manière didactique d'accord avec toutes les nécessités arithmétiques, analytiques et physiques d'aujourd'hui.

Les idéaux, dont on reprend maintenant la théorie générale, sont des formes bilinéaires d'éléments algébriques; il importe de les réduire à des types canoniques par une analyse de transformations linéaires dans laquelle on perçoit toutes les modalités de la Théorie des groupes et, sans doute, toutes les extensions possibles de la notion de divisibilité.

Les liens si délicats, si trompeurs, qui existent cependant entre divisibilité arithmétique et divisibilité algébrique, trouvent une première expression dans un théorème de Gauss. Les produits d'idéaux peuvent être *normés* et rapprochés alors de produits ordinaires. D'où aisément les idéaux premiers, au sujet desquels un théorème type remonte formellement à Fermat.

Une correspondance entre formes et idéaux a été étudiée par Kronecker et précisée par Hilbert. On peut être finalement conduit à des congruences qui se construisent par opérateurs aux dérivées partielles analogues à ceux de la théorie des polaires, ce que nous aurons d'ailleurs à rappeler plus loin à propos des *Modular Invariants* de D. E. Rutherford. Viennent ensuite les travaux de Hurwitz sur l'idéal plus grand commun diviseur de deux autres idéaux dits principaux, travaux intimément mêlés à ceux de G. Humbert adjoints à la traduction de Lévy et Got déjà citée.

Avec Hensel nous rencontrons notamment la notion de diviseur irrégulier conditionnée par des inégalités. Il me paraît impossible de donner ici, en