

# SUR LA POLAIRE GÉNÉRALISÉE

Autor(en): **d'Ocagne, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1932)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-24611>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LA POLAIRE GÉNÉRALISÉE

PAR

M. D'OCAGNE (Membre de l'Institut, Paris).

---

## GÉNÉRALITÉS.

1. — La généralisation, que nous avons ici en vue, de la polaire d'un point par rapport à une conique résulte de la substitution à cette conique d'un système de deux lignes quelconques ( $M_1$ ) et ( $M_2$ ). Si donc une droite issue du point  $O$  rencontre ces courbes aux points  $M_1$  et  $M_2$ , le point  $M$  de la polaire situé sur cette droite est le conjugué harmonique de  $O$  par rapport à  $M_1$  et  $M_2$ , c'est-à-dire le point  $M$  tel que (bien entendu, en tenant compte du sens des vecteurs)

$$\frac{2}{OM} = \frac{1}{OM_1} + \frac{1}{OM_2} . \quad (1)$$

Il est clair que, si  $M'$ ,  $M'_1$ ,  $M'_2$  constituent une autre position quelconque de ces trois points, *les droites*  $MM'$ ,  $M_1M'_1$ ,  $M_2M'_2$ , *qui joignent les points correspondants de deux divisions harmoniques ayant en commun le point*  $O$ , *sont concourantes*. Lorsque les droites  $OM$  et  $OM'$  sont infiniment voisines, on en déduit que *les tangentes en*  $M$ ,  $M_1$  *et*  $M_2$  *aux courbes que décrivent ces points sont concourantes*.

Si les points  $M_1$  et  $M_2$  sont symétriques par rapport à  $O$ , le point  $M$  est rejeté à l'infini sur la droite joignant ces points. Les directions asymptotiques de la courbe ( $M$ ) sont donc données par les droites joignant le point  $O$  aux points de rencontre d'une des courbes ( $M_1$ ) ou ( $M_2$ ) avec la symétrique de l'autre par rapport à  $O$ . La propriété des tangentes qui vient d'être énoncée

montre, en outre, que l'asymptote répondant à une des directions ainsi déterminées est constituée par la parallèle à cette direction, menée par la rencontre des tangentes aux points  $M_1$  et  $M_2$ , symétriques par rapport à  $O$ , qui lui correspondent.

Il suit de là que, si les courbes  $(M_1)$  et  $(M_2)$  sont algébriques, d'ordres  $n_1$  et  $n_2$ , la courbe  $(M)$  admet, en général,  $n_1 n_2$  directions asymptotiques et est, par suite, d'ordre  $n_1 n_2$ . En particulier, si l'une des lignes  $(M_1)$  ou  $(M_2)$  est droite, la polaire est de même ordre que l'autre.

2. — Si l'on prend, par rapport au pôle  $O$ , les inverses  $(M'_1)$ ,  $(M'_2)$  et  $(M')$  des lignes  $(M_1)$  et  $(M_2)$  et de la polaire  $(M)$ , on a, entre les vecteurs de ces trois dernières, la relation

$$2OM' = OM'_1 + OM'_2$$

qui montre que le point  $M'$  est le milieu de  $M'_1 M'_2$ , ce pourquoi la courbe  $(M')$  peut être dite la *moyenne* de  $(M'_1)$  et  $(M'_2)$  pour le point  $O$ .

Remarquons que si  $(M'')$  est l'homothétique de  $(M')$  par rapport à  $O$ , avec le rapport d'homothétie 2, auquel cas, il y a, au point de vue de la nature géométrique, identité entre  $(M')$  et  $(M'')$ , on a

$$OM'' = OM'_1 + OM'_2,$$

ou, si  $(M''_2)$  est la symétrique de  $(M'_2)$  par rapport à  $O$ ,

$$OM'' = OM'_1 - OM''_2 = M''_2 M'_1.$$

Lorsque la ligne  $(M'_1)$  est droite, cette égalité définit la *cissoïdale* de la courbe  $(M''_2)$  pour le point  $O$  et la droite  $(M'_1)$ .

3. — Rendons-nous compte maintenant de la façon dont le centre de courbure  $m$  répondant au point  $M$  de la polaire se déduit des centres de courbure  $m_1$  et  $m_2$  répondant aux points  $M_1$  et  $M_2$ . Pour cela, à titre de lemme, nous allons établir le lien qui existe entre le centre de courbure  $m$  et la tangente à la courbe que décrit l'extrémité de la sous-tangente polaire de  $(M)$ , c'est-à-dire le point de rencontre  $T$  de la tangente en  $M$  et de la

perpendiculaire élevée en O à OM<sup>1</sup>, qui, d'autre part rencontre la normale à la même courbe en N (fig. 1).

La normale à la courbe (T) coupant en N' la normale MN

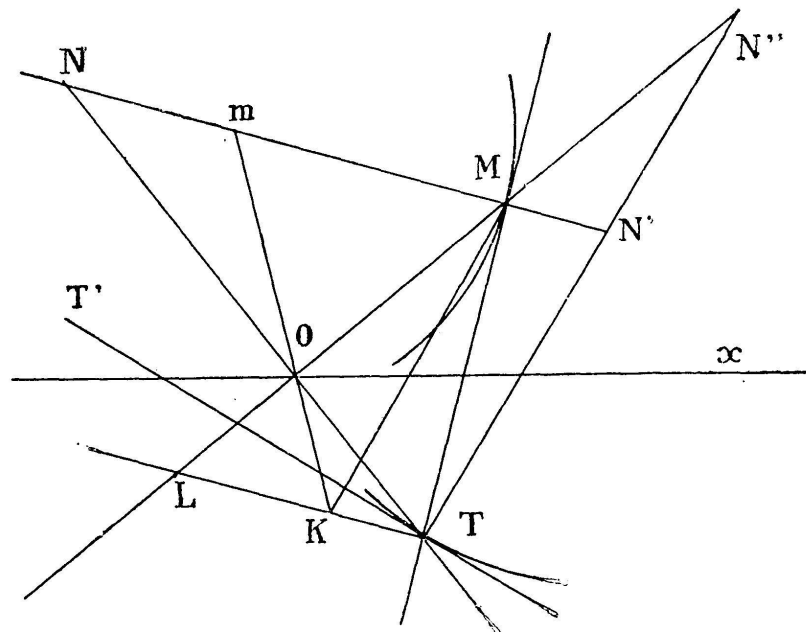


Fig.1.

à l'enveloppe de MT, une formule bien connue de Mannheim donne pour le rapport des arcs infiniment petits  $d(M)$  et  $d(T)$  décrits simultanément par les points M et T

$$\frac{d(M)}{d(T)} = \frac{Mm}{TN'}$$

Mais les droites rectangulaires OM et OT tournant ensemble du même angle  $d\omega$ , on a aussi, MN et TN'' étant les normales polaires correspondantes,

$$d(M) = MN \cdot d\omega, \quad d(T) = TN'' \cdot d\omega.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{Mm}{MN} = \frac{TN'}{TN''}$$

<sup>1</sup> La courbe (T) constitue une *adjointe infinitésimale* de la courbe (M), au sens défini dans mon mémoire du *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. LII, p. 132 et 395). Le nouvel exemple ici traité serait à joindre à celui qui figure au n° 7 de ce mémoire.

Or, si la perpendiculaire élevée en T à TM coupe OM en L et Om en K, on a

$$\frac{Mm}{MN} = \frac{LK}{LT}, \quad \frac{TN'}{TN''} = \frac{LM}{LN''}.$$

Donc

$$\frac{LK}{LT} = \frac{LM}{LN''},$$

ce qui montre que MK est parallèle à TN'', autrement dit perpendiculaire à la tangente TT' en T. Ainsi, *les perpendiculaires menées par chacun des points M et T à la tangente répondant à l'autre se coupent sur la droite qui joint le point O au centre de courbure m*. De là le moyen, si l'on connaît le centre de courbure *m*, d'en déduire la tangente TT' et *vice versa*.

Ce lemme étant établi, remarquons que si  $\omega$  est l'angle que OM fait avec l'axe Ox, on a

$$d\left(\frac{1}{OM}\right) = -\frac{d \cdot OM}{OM^2} = -\frac{ON \cdot d\omega}{OM^2} = -\frac{d\omega}{OT}.$$

Appliquant cette formule à la différentielle de (1), en appelant OT<sub>1</sub> et OT<sub>2</sub> les sous-tangentes polaires de (T<sub>1</sub>) et (T<sub>2</sub>), on voit que

$$\frac{2}{OT} = \frac{1}{OT_1} + \frac{1}{OT_2}, \quad (2)$$

c'est-à-dire que (T) est aussi la polaire de O par rapport à (T<sub>1</sub>) et (T<sub>2</sub>); par suite, les tangentes à ces trois courbes sont concourantes et la question que nous nous étions posée est résolue. En effet, la construction précédente permet de déduire des centres de courbure *m*<sub>1</sub> et *m*<sub>2</sub> les tangentes en T<sub>1</sub> et en T<sub>2</sub> dont le point de rencontre joint à T donne la tangente en T, et de cette tangente on déduit le centre de courbure *m*.

#### POLAIRES PAR RAPPORT A CERCLE ET DROITE.

4. — Les cas où les courbes (M<sub>1</sub>) et (M<sub>2</sub>) sont un cercle et une droite — où, par suite, d'après la fin du n<sup>o</sup> 1, la polaire (M) est

une conique — offrent quelques particularités qui méritent d'être signalées.

Supposons en premier lieu que le cercle  $(M_1)$  ait son centre au point  $O$  dont on prend la polaire. Abaisant de  $O$  sur la droite  $(M_2)$  la perpendiculaire  $OP_2$  prolongeons-la d'une longueur égale  $P_2P_0$  (fig. 2). Soit  $M_0$  le point où la droite  $OM$  rencontre la parallèle à la droite  $(M_2)$  menée par  $P_0$ . Si nous abaissons de  $M$  la perpendiculaire  $MH$  sur  $P_0M_0$ , nous avons

$$\frac{MH}{OP_0} = \frac{MM_0}{OM_0} = \frac{2OM_2 - OM}{2OM_2} = 1 - \frac{OM}{2OM_2},$$

ou, en tenant compte de (1),

$$\frac{MH}{OP_0} = \frac{OM}{2OM_1}, \tag{3}$$

qu'on peut écrire

$$\frac{MH}{OM} = \frac{OP_2}{OM_1}.$$

Ce rapport étant constant, la courbe  $(M)$  est une conique de foyer  $O$  et de directrice  $P_0M_0$ , Ainsi, *une conique quelconque est polaire d'un de ses foyers par rapport à un cercle ayant ce foyer pour centre et à une parallèle à la directrice correspondante située à mi-distance de cette directrice au foyer.*

Quant au rayon du cercle, il est facile de voir quelle est sa valeur. En effet, si l'on mène par  $O$  la parallèle à la droite  $(M_2)$ ,

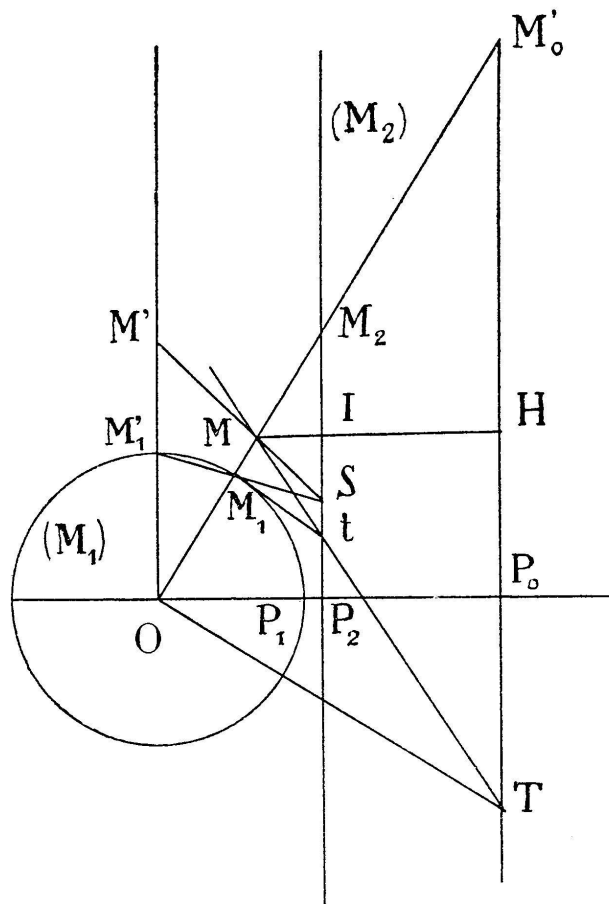


Fig. 2.

c'est-à-dire la perpendiculaire à l'axe focal, le point  $M'_2$  correspondant étant à l'infini,  $M'$  est le symétrique de  $O$  par rapport à  $M'_1$ ; autrement dit, *le rayon du cercle est la moitié de l'ordonnée de la conique correspondant au foyer, ordonnée égale, comme il est facile de le vérifier, au rayon de courbure répondant au sommet de l'axe focal.*

Le couple des points  $M'$  et  $M'_1$ , se prête à une construction facile de la conique point par point, puisque, ainsi qu'on l'a vu au n° 1, les droites  $M_1 M'_1$  et  $MM'$  se coupent en un point  $S$  de  $(M_2)$ .

Remarquons en passant que la conique  $(M)$  sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que  $OP_2$  sera supérieur, égal ou inférieur à  $OP_1$ , ce qui est bien conforme à ce qui a été dit au n° 1 de la détermination des asymptotes puisqu'ici le symétrique du cercle par rapport à  $O$ , c'est ce cercle lui-même.

On voit en particulier ainsi qu'*une parabole est la polaire de son foyer par rapport au cercle ayant ce foyer pour centre, qui passe par le sommet de la courbe, et la tangente en ce sommet.*

5. — Passons au problème des tangentes. D'après la construction générale indiquée au n° 1, la tangente en  $M$  est la droite qui joint ce point au point de rencontre  $t$  de la tangente en  $M_1$  au cercle  $(M_1)$  et de la droite  $(M_2)$ . Prolongeons cette tangente jusqu'en son point de rencontre  $T$  avec la directrice  $M_0 P_0$  et tirons  $OT$ . Nous avons

$$\frac{MT}{Mt} = \frac{MH}{MI} = \frac{MH}{MH - \frac{OP_0}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{OP_0}{2MH}},$$

ou, compte tenu de (3),

$$\frac{MT}{Mt} = \frac{1}{1 - \frac{OM_1}{OM}} = \frac{OM}{M_1 M}.$$

Cela prouve que les triangles  $OMT$  et  $tM_1 M$  sont semblables et, par suite, que l'angle  $MOT$  est droit, d'où cette propriété bien connue que *le segment de la tangente compris entre son point de contact et la directrice est vu du foyer sous un angle droit.*

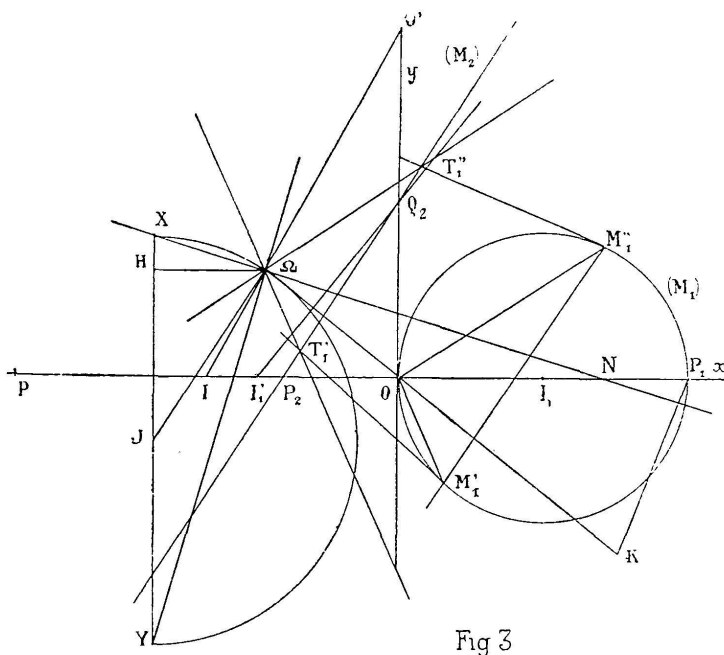
Ainsi, dans ce cas, le lieu  $(T)$  de l'extrémité de la sous-tan-

gente polaire est la directrice  $P_0M_0$ . L'application du théorème démontré au n° 3, fait voir dès lors que, si la perpendiculaire élevée en T à MT coupe MH au point K, la droite OK passe par le centre de courbure m répondant au point M.

6. — Un autre cas particulier conduisant à des propriétés un peu plus imprévues est celui où le cercle  $(M_1)$  passe par O, la droite  $(M_2)$  restant quelconque.

Si, par O, on mène la parallèle  $OM_1^0$ , à la droite  $(M_2)$ , qui rencontre le cercle  $(M_1)$  en  $M_1^0$ , le point  $M_2^0$  étant à l'infini,  $M^0$ , point de  $(M)$  situé sur cette droite, est le symétrique de O par rapport à  $M_1^0$ . La construction donnée au n° 1 montre alors que, sur une autre droite  $OM_1$  quelconque issue de O, le point M se trouve à la rencontre de cette droite avec celle qui joint le point  $M^0$  au point S où la droite  $(M_2)$  est coupée par la droite  $M_1^0M_1$ . En faisant tendre la droite OM vers la tangente Oy en O au cercle  $(M_1)$  on voit d'ailleurs bien facilement que la conique  $(M)$  est aussi tangente à Oy.

Si la droite symétrique de  $(M_2)$  par rapport à O coupe le cercle  $(M_1)$  en  $M_1'$  et  $M_1''$  (fig. 3),  $OM_1'$  et  $OM_1''$  sont les directions asymptotiques de la conique  $(M)$  et, ainsi qu'on l'a vu au n° 1, ces asymptotes elles-mêmes sont les parallèles à ces directions menées par



tiques de la conique  $(M)$  et, ainsi qu'on l'a vu au n° 1, ces asymptotes elles-mêmes sont les parallèles à ces directions menées par



les points  $T_1'$  et  $T_1''$  où les tangentes en  $M_1'$  et  $M_1''$  au cercle  $(M_1)$  rencontrent la droite  $(M_2)$ . Le centre  $\Omega$  de la conique  $(M)$  est à l'intersection de ces deux asymptotes qui, en plus du point  $O$  et de la tangente  $Oy$  en ce point, déterminent complètement cette conique  $(M)$ .

7. — Ces asymptotes pouvant être imaginaires [lorsque la symétrique de  $(M_2)$  par rapport à  $O$  ne coupe pas le cercle  $(M_1)$  en des points réels] proposons-nous de construire directement le centre  $\Omega$  et la direction des axes  $\Omega X$  et  $\Omega Y$  de la conique  $(M)$  qui, avec le point  $O$  et la tangente  $Oy$ , la détermineront dans tous les cas.

Prenant pour axes de coordonnées le diamètre  $Ox$  et la tangente  $Oy$  du cercle  $(M_1)$  et posant (bien entendu, en tenant compte du signe),  $OP_1 = \gamma_1$ ,  $OP_2 = \gamma_2$ ,  $OQ_2 = \delta_2$ ,  $P_1$  étant le point diamétralement opposé à  $O$  dans le cercle,  $P_2$  et  $Q_2$  les points de rencontre de la droite  $(M_2)$  avec  $Ox$  et  $Oy$ , on a pour les équations polaires des lignes  $(M_1)$  et  $(M_2)$ ,

$$\rho = \gamma_1 \cos \omega \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\cos \omega}{\gamma_2} + \frac{\sin \omega}{\delta_2},$$

d'où, pour  $(M)$ , l'équation

$$\frac{2}{\rho} = \frac{1}{\gamma_1 \cos \omega} + \frac{\cos \omega}{\gamma_2} + \frac{\sin \omega}{\delta_2},$$

ou, en passant aux coordonnées rectangulaires,

$$(\gamma_1 + \gamma_2)x^2 + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\delta_2}xy + \gamma_2 y^2 - 2\gamma_1 \gamma_2 x = 0, \quad (4)$$

que l'on peut écrire

$$x^2 + y^2 - 2\gamma_1 x + \gamma_1 x \left( \frac{x}{\gamma_2} + \frac{y}{\delta_2} \right) = 0.$$

Le cercle

$$x^2 + y^2 - 2\gamma_1 x = 0$$

est celui, de centre  $P_1$ , qui passe par  $O$ . Les cordes communes à ce cercle et à la conique  $(M)$  sont données par  $x = 0$  (tangente  $Oy$ ) et la droite  $\frac{x}{\gamma_2} + \frac{y}{\delta_2} = 0$ , qui n'est autre que la parallèle à  $(M_2)$

menée par O. Ce cercle et la conique (M) ont donc trois points communs confondus en O; autrement dit ce cercle est osculateur en O à la conique (M) pour laquelle, par suite, le point  $P_1$  est le centre de courbure répondant au point O.

La parallèle à  $(M_2)$  menée par O, qui constitue dès lors la corde commune à la conique et au cercle de courbure en O, peut être dite la corde de courbure en ce point.

Si  $\gamma$  est l'abscisse du second point d'intersection de la conique avec Ox, l'équation (4) peut s'écrire

$$\frac{2x^2}{\gamma} + \frac{xy}{\delta_2} + \frac{y^2}{\gamma_1} - 2x = 0 . \quad (4\text{bis})$$

Le centre  $\Omega$  est à l'intersection des droites

$$\frac{4x}{\gamma} + \frac{y}{\delta_2} - 2 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x}{\delta_2} + \frac{2y}{\gamma_1} = 0 .$$

La première est celle qui joint le milieu I de OP au symétrique O' de O par rapport à  $Q_2$  (fig. 3); la seconde, la perpendiculaire menée de O à la droite qui joint le point  $Q_2$  au symétrique I' du centre  $I_1$  du cercle  $(M_1)$  par rapport au point O.

Quant aux coefficients angulaires des axes de la conique dont (4) est l'équation, ils sont donnés par les racines en  $\mu$  de l'équation

$$\gamma_2 \mu^2 + 2\delta_2 \mu - \gamma_2 = 0$$

qui se traduit par la construction suivante : si le vecteur  $\Omega J$  est équipollent à  $Q_2 P_2$  (ses projections sur les directions de Ox et Oy étant  $\Omega H = \gamma_2$ ,  $HJ = -\delta_2$ ), le cercle de centre J passant par O coupe JH aux points X et Y par où passent les axes  $\Omega X$  et  $\Omega Y$  de la conique.

8. — Inversement, si l'on se donne sur une conique de centre  $\Omega$  un point O pour lequel  $P_1$  est le centre de courbure, la construction précédente, prise en sens contraire, fait connaître le système cercle et droite par rapport auquel la conique est la polaire du point O, cercle et droite qui pourraient être dits polairement associés au point O pour la conique considérée.

D'abord le cercle est celui qui a pour diamètre le rayon de

courbure  $OP_1$ . Pour la droite, ayant pris le symétrique  $I'$  du centre  $I_1$  du cercle par rapport à  $O$ , on mène par  $I'_1$  au diamètre  $O\Omega$  de la conique la perpendiculaire  $P_2Q_2$  qui coupe en  $Q_2$  la tangente en  $O$ . On joint ensuite le centre  $\Omega$  au symétrique  $O'$  de  $O$  par rapport à  $Q_2$ ; on obtient ainsi sur  $Ox$  le point  $I$ ; le symétrique  $P$  de  $O$  par rapport à  $I$  est alors le second point commun à  $Ox$  et à la conique. Il suffit de prendre le conjugué harmonique  $P_2$  de  $P_1$  par rapport à  $O$  et  $P$  pour achever de déterminer la droite  $P_2Q_2$ .

D'après ce qu'on vient de voir, cette droite est parallèle à la corde de courbure en  $O$ . La construction de sa direction au moyen du vecteur  $\Omega J$  montre, en outre, qu'elle est parallèle à la droite joignant le centre  $\Omega$  au milieu du segment de la tangente compris entre les axes de la conique, ou encore qu'elle a, par rapport aux axes de la conique, une inclinaison égale et de sens contraire à celle de la tangente en  $O$ .

9. — Remarquons en passant que de là résulte une construction simple d'une conique définie par un de ses points  $O$  et les centres correspondants  $P_1, P'_1, P''_1$  des trois premières courbures. J'ai, en effet, indiqué naguère un moyen de déduire de ces trois centres le centre  $\Omega$  de la conique<sup>1</sup>; je le rappelle ici: d'abord si l'on prolonge le rayon de seconde courbure  $P'_1P_1$  du tiers de sa longueur en  $P_1U_1$ , le centre  $\Omega$  se trouve sur la droite  $OU_1$  (théorème anciennement obtenu par Maclaurin); puis, si l'on projette de même le rayon de troisième courbure  $P''_1P'_1$  du tiers de sa longueur en  $P'_1U'_1$ , et si par les projections  $u'_1$  et  $p_1$  de  $U'_1$  et  $P_1$  sur  $OU_1$ , on mène les parallèles respectivement à la tangente et à la normale en  $O$ , qui se coupent en  $V$ , le centre  $\Omega$  se trouve aussi sur la droite  $P_1V$ . Une fois le centre  $\Omega$  ainsi obtenu, on est ramené au problème traité au n° 8, qui fournit une construction simple de la conique cherchée.

10. — D'après ce qui a été vu au n° 2, l'inverse de la conique par rapport au point  $O$  sera la moyenne, pour ce point, du cercle  $(M'_2)$  et de la droite  $(M'_1)$  inverses, relativement à ce pôle  $O$ , de

<sup>1</sup> *Nouv. Ann. de Math.*, 3<sup>me</sup> série, t. XVI, 1897, p. 258.

la droite ( $M_2$ ) et du cercle ( $M_1$ ), que l'on sait déduire de la conique, comme on l'a vu au n° 8.

La remarque qui termine le n° 8 montre que cette courbe inverse de ( $M$ ) est une cissoïdale du cercle ( $M_1$ ). Lorsque la droite ( $M_2$ ) est la perpendiculaire au diamètre  $OP_1$  de ce cercle menée par le symétrique  $P_2$  de  $P_1$  par rapport à  $O$ , la symétrique de cette droite par rapport à  $O$  est tangente au cercle ( $M_1$ ) en  $P_1$ ; la conique admet alors une direction asymptotique double confondue avec  $OP_1$ ; c'est une parabole d'axe  $Ox$  et de sommet  $O$ .

Si l'on opère l'inversion par rapport à  $O$  avec une puissance égale à  $OP_1^2$ , l'inverse du cercle ( $M_1$ ) est la tangente en  $P_1$  à ce cercle, celle de la droite ( $M_2$ ) est le cercle décrit sur  $OP_2$  comme diamètre, dont le symétrique par rapport à  $O$  se confond avec le cercle ( $M_1$ ). Donc, en vertu de ce qui a été vu au n° 2, l'inverse de la parabole ( $M$ ) est la cissoïdale du cercle ( $M_1$ ) et de sa tangente en  $P_1$  pour le pôle  $O$ , c'est-à-dire une cissoïde de Dioclès. On retrouve ainsi le théorème bien connu qui dit que *l'inverse d'une parabole par rapport à son sommet est une cissoïde de Dioclès*.

11. — Envisageons maintenant dans sa pleine généralité la question de la polaire d'un point  $O$  (que nous pourrions toujours supposer pris comme origine de deux axes rectangulaires  $Ox$  et  $Oy$ ) par rapport au système d'un cercle et d'une droite.

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont les coordonnées du centre du cercle, de rayon  $r$ , par rapport auquel la puissance  $t^2$  de l'origine est donnée par

$$t^2 = \alpha^2 + \beta^2 - r^2, \quad (5)$$

l'équation de ce cercle en coordonnées polaires est

$$\rho^2 - 2\rho(\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega) + t^2 = 0$$

d'où

$$\rho = \alpha \cos \omega + \beta \sin \omega \pm \sqrt{(\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega)^2 - t^2},$$

ou, eu égard à (5),

$$\rho = \alpha \cos \omega + \beta \sin \omega \pm \sqrt{r^2 - (\alpha \sin \omega - \beta \cos \omega)^2}.$$

D'autre part, si la droite donnée a  $\gamma$  et  $\delta$  pour abscisse et pour ordonnée à l'origine, son équation polaire est

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos \omega}{\gamma} + \frac{\sin \omega}{\delta} .$$

Dès lors l'équation de la polaire de O par rapport au système du cercle et de la droite sera

$$\frac{2}{\rho} = \frac{1}{\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega \pm \sqrt{r^2 - (\alpha \sin \omega - \beta \cos \omega)^2}} + \frac{\cos \omega}{\gamma} + \frac{\sin \omega}{\delta} ,$$

d'où, si l'on pose

$$\alpha x + \beta y = u , \quad \alpha y - \beta x = v , \quad \frac{x}{\gamma} + \frac{y}{\delta} - 2 = \omega ,$$

l'équation en coordonnées cartésiennes

$$x^2 + y^2 + u\omega = \mp \omega \sqrt{r^2(x^2 + y^2) - v^2}$$

ou, si l'on élève au carré et que l'on groupe tous les termes dans le premier membre

$$(x^2 + y^2)^2 + \omega(x^2 + y^2)(2u - r^2\omega) + \omega^2(u^2 + v^2) = 0 .$$

Or, on vérifie immédiatement que

$$u^2 + v^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) .$$

Il vient donc finalement, après suppression du facteur  $x^2 + y^2$

$$x^2 + y^2 + 2u\omega + \omega^2 t^2 = 0 .$$

Y remplaçant  $u$ ,  $\omega$ , par leurs valeurs et ordonnant, on a finalement

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{2\alpha}{\gamma} + \frac{t^2}{\gamma^2}\right)x^2 + 2\left(\frac{\alpha}{\delta} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{t^2}{\gamma\delta}\right)xy + \left(1 + \frac{2\beta}{\delta} + \frac{t^2}{\delta^2}\right)y^2 \\ & - 4\left(\alpha + \frac{t^2}{\gamma}\right)x - 4\left(\beta + \frac{t^2}{\delta}\right)y + 4t^2 = 0 . \end{aligned} \quad (6)$$

Telle est l'équation de la conique polaire cherchée.

12. — Inversement, nous donnant dans le plan une conique quelconque, nous pouvons chercher à déterminer pour cette

conique le cercle et la droite polairement associés au point O.

Soit, par exemple, la conique d'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 . \quad (7)$$

Pour l'identifier à (6), il faut, si l'on remplace  $\frac{1}{\gamma}$  et  $\frac{1}{\delta}$  par  $\mu$  et  $\nu$ , poser,  $\lambda$  étant un coefficient de proportionnalité, nécessairement différent de zéro,

$$A = \lambda(1 + 2\alpha\mu + t^2\mu^2) , \quad (8) \quad D = -2\lambda(\alpha + t^2\mu) , \quad (11)$$

$$B = \lambda(\alpha\nu + \beta\mu + t^2\mu\nu) , \quad (9) \quad E = -2\lambda(\beta + t^2\nu) , \quad (12)$$

$$C = \lambda(1 + 2\beta\nu + t^2\nu^2) , \quad (10) \quad F = 4\lambda t^2 . \quad (13)$$

Tirant  $t^2$  de (13) pour le porter dans les cinq autres équations du système, on a

$$A = \lambda + 2\lambda\alpha\mu + \frac{F}{4}\mu^2 , \quad (14) \quad D = -2\lambda\alpha - \frac{F}{2}\mu , \quad (17)$$

$$B = \lambda(\alpha\nu + \beta\mu) + \frac{F}{4}\mu\nu , \quad (15) \quad E = -2\lambda\beta - \frac{F}{2}\nu . \quad (18)$$

$$C = \lambda + 2\lambda\beta\nu + \frac{F}{4}\nu^2 , \quad (16)$$

Les valeurs de  $\lambda\alpha$  et de  $\lambda\beta$  que donnent (17) et (18) portées dans (14), (15), (16) les transforment en

$$A = \lambda - D\mu - \frac{F}{4}\mu^2 , \quad (19)$$

$$B = -\frac{1}{2}\left(D\nu + E\mu + \frac{F}{2}\mu\nu\right) , \quad (20)$$

$$C = \lambda - E\nu - \frac{F}{4}\nu^2 . \quad (21)$$

Enfin, de (19) et (21) on déduit

$$A - C = -D\mu + E\nu - \frac{F}{4}(\mu^2 - \nu^2) . \quad (22)$$

Les équations (20) et (22) font connaître  $\mu$  et  $\nu$ . Nous allons discuter ce système d'équations.

13. — Si, dans ces équations, on regarde  $\mu$  et  $\nu$  comme des coordonnées  $x$  et  $y$ , on voit que tout revient à trouver les points

communs aux hyperboles équilatères

$$\frac{F}{2}xy + Ex + Dy + 2B = 0 ,$$

et

$$\frac{F}{4}(y^2 - x^2) - Dx + Ey + C - A = 0 ,$$

qui ont leurs asymptotes, l'une, parallèles aux axes  $Ox$  et  $Oy$ , l'autre, parallèles aux bissectrices de ces axes. Or, il se trouve que ces deux hyperboles ont même centre, défini par les équations

$$\frac{F}{2}y + E = 0 , \quad \frac{F}{2}x + D = 0 .$$

Si donc, on transporte l'origine en ce centre commun, sans changer la direction des axes  $Ox$  et  $Oy$ , les équations de ces hyperboles prennent la forme

$$xy = K , \\ y^2 - x^2 = L ,$$

$K$  et  $L$  ayant d'ailleurs des signes quelconques. L'équation aux abscisses des points communs est

$$x^4 + Lx^2 - K^2 = 0 .$$

Si l'on y prend  $x^2$  pour inconnue, le produit des racines étant négatif, une seule des racines est positive; elle seule donne pour  $x$  des valeurs réelles; donc, *deux seulement des solutions en  $\mu$  et  $\nu$  des équations (20) et (22) sont réelles*, et, par suite, *on ne trouve que deux systèmes réels de droite et cercle polairement associés au point  $O$ , mais on en trouve toujours deux*.

Une fois  $\mu$  et  $\nu$  ainsi déterminés, les équations (14), (15) et (16), linéaires en  $\lambda$ ,  $\lambda\alpha$ ,  $\lambda\beta$ , permettent le calcul de ces trois inconnues, et conséquemment de  $\alpha$  et  $\beta$ . D'autre part, la valeur de  $\lambda$  portée dans (13), donne  $t^2$ , puis,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $t^2$  étant connus,  $r$  se déduit de (5), et le problème est complètement résolu.

En résumé, on voit qu'*une conique donnée est doublement polaire d'un point quelconque de son plan par rapport à un cercle et une droite associés à ce point*.

Donc aussi, d'après ce qui a été vu au n° 2, *l'inverse d'une conique par rapport à un point quelconque de son plan est doublement moyenne, pour le point considéré, de deux cercles dont l'un passe par ce point.*

Il va sans dire que la particularisation des données peut introduire de sensibles simplifications dans les calculs ci-dessus. Par exemple, si la conique donnée passe par le point  $O$ , on peut prendre pour  $Ox$  et  $Oy$  la normale et la tangente en ce point, ce qui revient à faire, dans (7),  $E = F = 0$ . Les équations (20) et (22) se réduisent alors à

$$2B = -D\nu, \quad A - C = -D\mu,$$

d'où, en ce cas, une solution unique, celle qui a été obtenue géométriquement au n° 8.

14. — A titre d'application des formules qui viennent d'être trouvées, déterminons pour une ellipse les systèmes de cercle et droite associés pour son centre. Ici, les coefficients de l'équation (7) sont

$$A = b^2, \quad B = 0, \quad C = a^2, \quad D = 0, \quad E = 0, \quad F = -a^2b^2.$$

Les équations (20) et (22) deviennent donc,  $c$  étant la distance focale  $\sqrt{a^2 - b^2}$ ,

$$\mu\nu = 0, \quad c^2 = \frac{a^2b^2}{4}(\nu^2 - \mu^2).$$

On peut y satisfaire soit par  $\mu = 0$ , soit par  $\nu = 0$ ; mais la seconde des équations donne, pour  $\mu = 0$ , des valeurs réelles pour  $\nu$ , tandis que la seconde donne, pour  $\nu = 0$ , des valeurs imaginaires pour  $\mu$ . On a donc les deux solutions réelles prévues avec  $\mu = 0$ ; ces deux solutions sont d'ailleurs symétriques par rapport à  $Ox$ ; il suffit d'en examiner une, celle, par exemple, pour laquelle  $\mu = 0$ , et  $\nu = \frac{2c}{ab}$ , donc

$$\gamma = \infty \quad (23) \quad \text{et} \quad \delta = \frac{ab}{2c} \quad (24)$$



Maintenant l'équation (14) se réduit à

$$\lambda = b^2 ,$$

ce qui transforme (13) en

$$- a^2 b^2 = 4 b^2 t^2 ,$$

d'où

$$t^2 = - \frac{a^2}{4} . \quad (25)$$

Quant aux équations (17) et (18), elles deviennent

$$\alpha = 0 , \quad (26)$$

et

$$0 = - 2 b^2 \beta + abc$$

d'où

$$\beta = \frac{ac}{2b} . \quad (27)$$

Les valeurs (25), (26) et (27) de  $t^2$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  portées dans (5) donnent alors

$$r = \frac{a^2}{2b} \quad (28)$$

qui montre que le rayon du cercle cherché est la moitié du rayon de courbure répondant au sommet du petit axe de l'ellipse.

Ces formules se traduisent d'ailleurs par une construction d'une extrême simplicité.

Soient, comme d'habitude, A et A' les sommets du grand axe, B et B' ceux du petit, F et F' les foyers. Marquons aussi les milieux D et D' des demi-axes OA et OA'.

La formule (23) montre que la droite ( $M_2''$ ) est parallèle à AA' et la formule (24) que cette droite ( $M_2$ ) coupe BB' en un point P tel que DP soit parallèle à FB. De même la formule (26) montre que le cercle ( $M_1$ ) a son centre C sur BB', au point où, d'après (27), cet axe est coupé par la perpendiculaire menée de D' à FB.

Enfin, il est clair que lorsque le point M vient coïncider avec le sommet A, le point  $M_2$  étant alors à l'infini, le point  $M_1$  se trouve au milieu de OA, c'est-à-dire au point D. Le cercle ( $M_1$ ) est donc celui qui, ayant son centre en C, passe par D et D'.

Quant à l'inverse de l'ellipse par rapport à son centre, nous la construirons très simplement en prenant pour la puissance d'inversion celle du point O par rapport au cercle  $(M_1)$  qui est  $-\frac{a^2}{4}$  d'après (25). Dans ces conditions le cercle  $(M_1)$  se transforme en lui-même. Quant à la droite  $(M_2)$  elle a pour transformé le cercle décrit sur  $OP'$  pour diamètre si  $P'$  est le transformé de  $P$ ; or, comme, d'après les formules (24) et (27), on a précisément  $OP \cdot OC = \frac{a^2}{4}$ , il en résulte que  $P'$  est le symétrique de  $C$  par rapport à  $O$ .

*La moyenne, pour le point O du cercle  $(M_1)$  et du cercle décrit sur  $OP'$  comme diamètre est l'inverse cherchée.* Ce théorème fournit de cette inverse (quartique, comme on sait ayant un point double isolé en  $O$  et en chacun des ombilics du plan) une construction d'une remarquable simplicité.

Le même calcul appliqué à une hyperbole ayant une équation  $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ , où  $a$  est le demi-axe transverse  $AA'$ ,  $b$  la demi-longueur du segment de la tangente en  $A$  ou  $A'$ , compris entre les asymptotes, donne

$$\alpha = -\frac{bc}{2a}, \quad \beta = 0, \quad r = \frac{b^2}{2a}, \quad \gamma = \frac{ab}{2c}, \quad \delta = \infty,$$

où  $c$  représente la demi-distance focale, c'est-à-dire  $\sqrt{a^2 + b^2}$ . Si, sur l'axe non-transverse, on prend les points  $E$  et  $G$  d'ordonnées  $c$  et  $\frac{b}{2}$ , la parallèle et la perpendiculaire à  $EA$ , menées par  $G$  coupant l'axe  $AA'$  en  $P$  et  $C$ , le système polairement associé au centre  $O$  de l'hyperbole se compose de la perpendiculaire élevée en  $P$  à  $AA'$  et du cercle de centre  $C$  tangent aux asymptotes.

Si l'on inverse la figure par rapport à  $O$  avec la puissance d'inversion  $\frac{b^2}{4}$ , la perpendiculaire en  $P$  à  $AA'$  a pour transformé le cercle décrit sur le symétrique  $OC'$  de  $OC$  par rapport à  $O$ , comme diamètre, et le cercle de centre  $C$  en lui-même. L'inverse de l'hyperbole est la moyenne de ces deux cercles pour le point  $O$ .

De là, une construction fort simple de la lemniscate de Bernoulli de centre  $O$  et de longueur d'axe  $2l$ , considérée comme inverse d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre: on prend sur l'axe, de part et d'autre du centre  $O$ , les segments

$OC = OC' = 2l \sqrt{2}$ , et l'on trace le cercle de centre  $C$  et de rayon  $2l$  et le cercle ayant  $OC'$  pour diamètre; la lemniscate est la moyenne de ces deux cercles pour le centre  $O$ .

15. — Dans le cas de l'ellipse, comme dans celui de l'hyperbole, le système droite et cercle polairement associé soit à un sommet de l'axe focal, soit à un foyer, se compose d'une droite perpendiculaire à l'axe focal et d'un cercle ayant son centre sur cet axe, mais le système droite et cercle polairement associé au centre comprend encore, dans le cas de l'hyperbole, une droite et un cercle de même disposition, alors que, pour le centre de l'ellipse, la droite est perpendiculaire à l'axe non focal, le cercle ayant son centre sur cet axe (n° 4). Il y a là une anomalie apparente qu'il n'est pas sans intérêt d'élucider par la discussion que voici:

Pour une ellipse admettant  $Ox$  pour axe focal, et dont le centre ait l'abscisse  $x_0$ , c'est-à-dire pour l'ellipse d'équation

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - 2b^2 x_0 x + b^2(x_0^2 - a^2) = 0,$$

les équations (20) et (22) deviennent

$$\begin{aligned} 0 &= 2x_0 v - (x_0^2 - a^2) \mu v, \\ -4c^2 &= 4b^2 x_0 \mu - b^2(x_0^2 - a^2)(\mu^2 - v^2). \quad (\text{avec } c^2 = a^2 - b^2) \end{aligned}$$

On peut satisfaire à la première en prenant

$$\text{soit } v = 0, \quad \text{soit } \mu = \frac{2x_0}{x_0^2 - a^2}.$$

En ce cas, la seconde donne

$$\text{soit } \mu = \frac{2(bx_0 \pm a\sqrt{x_0^2 - c^2})}{b(x_0^2 - a^2)}, \quad \text{soit } v = \pm \frac{2a\sqrt{c^2 - x_0^2}}{b(x_0^2 - a^2)}.$$

Si  $x_0 > c$ , c'est la première double solution qui est réelle; donc pour tous les points extérieurs à l'intervalle limité par les foyers,  $\delta = 0$ , c'est-à-dire  $\nu = \infty$ , la droite du système est perpendiculaire à l'axe focal; c'est le cas pour les sommets; c'est aussi, à la limite, le cas pour les foyers.

Par contre, si  $x_0 < c$ , c'est la seconde double solution qui est réelle; la droite est inclinée sur  $Ox$  et devient à la limite, pour  $x_0 = 0$  (cas du centre), parallèle à cet axe.

Dans le cas de l'hyperbole

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 - 2 b^2 x_0 x + b^2 (x_0^2 - a^2) = 0 ,$$

les équations (20) et (22) deviennent

$$0 = 2 x_0 v - (x_0^2 - a^2) \mu v ,$$

$$4 c^2 = 4 b^2 x_0 \mu - b^2 (x_0^2 - a^2) (\mu^2 - v^2) . \quad (\text{avec } c^2 = a^2 + b^2)$$

Comme dans le cas précédent on peut satisfaire à la première en prenant

$$\text{soit } v = 0 , \quad \text{soit } \mu = \frac{2 x_0}{x_0^2 - a^2} .$$

Mais alors la seconde donne

$$\text{soit } \mu = \frac{2 (b x_0 \pm a \sqrt{c^2 - x_0^2})}{b (x_0^2 - a^2)} , \quad \text{soit } v = \frac{2 a \sqrt{x_0^2 - c^2}}{b (x_0^2 - a^2)} ,$$

et l'on voit que la conclusion est le contraire de celle du cas de l'ellipse; c'est avec  $x_0 < c$  que la première double solution est réelle, avec  $x_0 > c$  que ce caractère appartient à la seconde. Or, ici, avec le centre ( $x_0 = 0$ ), aussi bien qu'avec le sommet ( $x_0 = a$ ) et, à la limite, avec le foyer ( $x_0 = c$ ), on a affaire à la première hypothèse ( $x_0 < c$ ), et, par suite, on trouve  $\delta = \infty$ , c'est-à-dire une droite perpendiculaire à l'axe focal aussi bien pour le centre que pour le sommet et le foyer.

Dans le cas de la parabole pour le sommet, c'est la droite extérieure à la parabole dont la distance au sommet est égale au paramètre  $p$ ; pour le foyer, c'est la tangente au sommet; pour ces deux points d'ailleurs le cercle du système est le même; c'est celui qui est construit sur le rayon de courbure au sommet (égal à  $p$ ) comme diamètre.