UNE DÉMONSTRATION SIMPLE DE LA FORMULE D'INTERPOLATION DE S. BERNSTEIN

PAR

Alexandre WUNDHEILER (Varsovie).

La formule de M. Bernstein:

$$f(x) = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} f\left(\frac{k}{m}\right)\binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}, \qquad 0 \leqq x \leqq 1, \tag{1}$$

donne un développement effectif de la fonction continue $f(x)$ en une suite uniformément convergente de polynomes. En tenant compte du théorème bien connu de Weierstrass, il suffit de démontrer cette formule pour les polynomes $f(x)$, ce qui se réduit à sa démonstration pour $f(x) = x^p$, vu sa dépendance linéaire de $f(x)$. Il s'agit alors de démontrer pour p entier positif

$$x^p = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{k^p}{m^p}\binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}. \tag{2}$$

Nous partons, dans ce but, de l'identité assez proche de (2):

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{m(m-1)\dots(m-p+1)}\binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} = x^p. \tag{3}$$

Sa vérification est immédiate. En effet, le premier membre est égal à

$$x^p \sum_{p}^{m} \frac{(m-p)\dots(m-k+1)}{(k-p)\dots 1} x^{k-p}(1-x)^{m-p-(k-p)}$$

$$= x^p \sum_{i=0}^{m-p} \binom{m-p}{i} x^i (1-x)^{m-p-i} = x^p,$$

car cette somme est le développement du binôme

$$(x + \overline{1 - x})^{m-p} = 1 \ .$$

Il s'agit maintenant de comparer la somme (3) avec

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{k^p}{m^p} \binom{m}{k} x^k (1 - x)^{m-k} \ . \tag{4}$$

Cette comparaison est fondée sur la remarque bien simple que, si k est suffisamment supérieur à $p \left(k > \frac{p^2}{\varepsilon}\right)$, les expressions

$$\frac{k(k-1) \ldots (k-p+1)}{m(m-1) \ldots (m-p+1)} \quad \text{et} \quad \frac{k^p}{m^p}$$

diffèrent d'aussi peu que l'on veut. Si, de plus, m est suffisamment grand, chacun de ces termes mêmes, pour les autres valeurs de k, sera arbitrairement petit.

D'une manière précise, pour $p \leqq k \leqq m$ on aura:

$$0 \leqq \frac{k^p}{m^p} - \frac{k(k-1) \ldots (k-p+1)}{m(m-1) \ldots (m-p+1)} \leqq \frac{k^p}{m^p} - \frac{(k-p)^p}{m^p}$$

$$= \frac{k^p}{m^p}\left[1 - \left(1 - \frac{p}{k}\right)^p\right] \leqq 1 - \left(1 - \frac{p}{k}\right)^p \leqq 1 - \left(1 - \frac{p^2}{k}\right)$$

$$= \frac{p^2}{k} < \varepsilon \ , \qquad \text{pour} \qquad k > \frac{p^2}{\varepsilon} \ .$$

Tandis que, pour $k \leqq \frac{p^2}{\varepsilon}$:

$$\frac{k(k-1) \ldots (k-p+1)}{m(m-1) \ldots (m-p+1)} \leqq \frac{k^p}{(m-p)^p} \leqq \left(\frac{2k}{m}\right)^p \leqq \left(\frac{2p^2}{\varepsilon m}\right)^p < \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

si

$$m > 2p \qquad \text{et} \qquad > \frac{2p^2}{\varepsilon} \sqrt[p]{\frac{2}{\varepsilon}} \ .$$

On aura donc aussi:

$$\frac{k^p}{m^p} < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

La différence des sommes (3) et (4) sera donc, pour

$$m > 2p \qquad \text{et} \qquad > \frac{2p^2}{\varepsilon} \sqrt[p]{\frac{2}{\varepsilon}},$$

moindre que

$$\sum_{k=0}^{m} \varepsilon \binom{m}{k} x^k (1 - x)^{m-k} = \varepsilon ,$$

d'où on tire qu'elle tend uniformément vers zéro.

SUR UNE LOI CORRECTIVE DE LA LOI DE NEWTON POUR LA DÉTERMINATION DU DÉPLACEMENT DU PÉRIHÉLIE ET DE LA DÉVIATION DES RAYONS LUMINEUX[1]

PAR

M. I. Tzénoff (Sofia).

---

1. — Dans cet article nous nous posons le problème suivant: en prenant comme point de départ la seconde loi du mouvement de Newton (la variation de la quantité de mouvement est égale, en grandeur et en direction à la force appliquée au point matériel) déterminer le mouvement d'un point matériel de masse variable m, attiré suivant la loi de Newton par un centre fixe de masse M (par exemple le Soleil), en supposant que la masse variable m ne dépend que de la distance r du point au centre et que, pendant toute la durée du mouvement, l'intégrale de la force vive existe. La demi-force vive ou l'énergie cinétique du point est donnée par la formule $mc^2 - m_0c^2$ (valable pour les petites et pour les grandes

[1] A propos de l'article de M. G. Maneff, « Considération substantielle de la Gravitation », imprimé dans les *Annales de l'Université de Sofia*, 1930-31.