Roma; *Università.* — Armellini: Astronomia siderale: Costituzione interna delle stelle; stelle variabili e stelle doppie, 3. — Bisconcini: Meccanica dei sistemi continui, 3. — Bompiani: Geometria differenziale: Deformazioni di specie superiore di varietà riemanniane, 3. — Cantelli: Matematica attuariale e statistica matematica, 3. — Castelnuovo: Calcolo delle probabilità, 3. — Enriques: Teoria delle superficie algebriche, 3. — Krall: Meccanica analitica e ipotesi cosmogoniche, 3. — Perna: Funzioni analitiche. Critica dei fondamenti delle matematiche elementari, 3. — Picone: Teoria lebesguiana delle funzioni di variabile reale. Calcolo funzionale. Calcolo delle variazioni, 3.

Torino; *Università.* — Boggio: Meccanica analitica e spazi curvi, 3. — Colombo: Vedute superiori sulle matematiche elementari e complementi vari, 3. — Fubini: Funzioni analitiche: in particolare, funzioni ipergeometriche; funzioni trigonometriche, sferiche, di Bessel, di Lamé, ellittiche, 3. — Persico: Teorie statistiche della materia e della radiazione, 3. — Somigliana: Teoria della propagazione del calore e metodi classici d'integrazione. Principii di termodinamica e di elettrostatica, 3. — Terracini: Argomenti scelti di geometria differenziale, 3.

BIBLIOGRAPHIE

Gaston Julia. — **Principes géométriques d'Analyse,** Deuxième Partie. Leçons rédigées par André Magnier (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia. Fascicule XI). — Un volume gr. in-8° de VIII-121 pages et 37 figures. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1932.

Nous avons déjà rendu compte (t. XXIX, 1930, p. 350) de la Première Partie de ces *Principes*. C'est toujours le beau Cours généreusement recueilli pour qui ne peut le suivre. Il débute, en cette Deuxième Partie, par le Principe du module maximum, module n'existant pas, pour une fonction holomorphe, *dans* un domaine D. Cette première forme élémentaire de l'assertion admet diverses variantes plus complexes, le tout ayant pour prototype l'archaïque mais inébranlable théorème de Liouville. Cependant ce dernier théorème semble avoir de nombreuses apparences contre lui mais ce ne sont que des apparences qu'il faut savoir tirer au clair.

Après les fonctions entières de Mittag-Leffler croissant incomparablement plus vite dans un angle qu'en dehors de celui-ci, nous eûmes la fonction à direction d'infinitude privilégiée puis la fonction à modules bornés sur toutes directions, l'ensemble des bornes, toutefois, n'étant pas borné. J'ai déjà dit, dans le *Mémorial* (fasc. VII, *Séries analytiques. Sommabilité*) tout l'intérêt qui s'attachait à ces finesses et je suis reconnaissant à M. Julia qui (p. 18) y renvoie son lecteur.

Ces considérations se perfectionnent encore en un certain lemme de Carleman qui, au Chapitre II, s'étend aux fonctions harmoniques. C'est l'occasion de revenir sur la représentation conforme et le Principe de Dirichlet avec lequel il y a encore tant à étudier sur les contours.

Le Chapitre III est consacré à la fonction modulaire et aux surfaces de Riemann associées, ce qui permet d'arriver aux théorèmes de M. Emile Picard, aux subtilités avoisinant maintenant des racines. De chercheur à chercheur, de professeur à professeur, il y a, dans de tels sujets, des rencontres inévitables et nous pourrions répéter ici ce que nous disions l'an dernier en analysant les *Studien über den Schottkyschen Satz* d'Alexander Ostrowski. Avec M. Julia, c'est surtout une méthode de M. Lindelöf qui sert de base, en tant qu'elle peut être prolongée, conformément aux idées de M. Littlewood, vers les conceptions sur les moyennes de modules, les fonctions subordonnées l'une à l'autre et, en particulier, les fonctions subharmoniques. Evidemment il y a encore là des procédés inégalitaires, des procédés de majoration mais qui n'ont plus un caractère accidentel. Les méthodes majorantes ont aujourd'hui une esthétique spéciale, moins visible, sans doute, que celle des méthodes égalitaires mais tout aussi nécessaire à la perfection mathématique. D'ailleurs, comme le dit M. Julia dans sa Préface, de telles expositions ne sont jamais complètes et ne peuvent l'être. Il y a tellement d'arbres qu'il faut en sacrifier quelques-uns si l'on ne veut perdre de vue la forêt. Toutefois, avec des cours comme celui que vient de rédiger M. André Magnier, on a le moyen d'assimiler des théories délicates, exigeant beaucoup de finesse d'esprit mais promettant, en retour, des élaborations fécondes et de plus en plus originales.

A. BUHL (Toulouse).

Paul MONTEL. — **Leçons sur les Fonctions entières ou méromorphes,** recueillies par P. Sergesco (Publications du Séminaire mathématique de l'Université de Cluj, fasc. 1). — Un volume gr. in 8° de XIV-116 pages. Prix: 30 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1932.

Encore le théorème de M. Emile Picard ! C'est tout naturel. C'est le fond des choses en Théorie des fonctions tout comme la notion de racine a toujours été tout ce qu'il y a de plus fondamental en matière d'équations algébriques. Rien qu'en feuilletant le nouveau volume, j'ai retrouvé Schottky, Ostrowski, Julia et j'ai, tout de suite, été fixé. Mais j'ai retrouvé aussi l'auteur même, M. Paul Montel, dont les méthodes ne manquent point d'une puissante originalité; j'ai même rapidement compris qu'il avait été appelé en Roumanie à cause de cela et que son exposé, recueilli par M. Sergesco, Professeur à l'Université de Cluj, inaugurait une nouvelle Collection mathématique qui ne serait d'ailleurs pas consacrée rien qu'à la Théorie des Fonctions mais qui aurait un rôle général d'initiation vers les grandes choses n'ayant que de petites places dans les traités classiques. Et, dans ces conditions, le théorème de M. Picard s'imposait pour un fascicule inaugural.

Tout est pris ici, comme il convenait, de manière relativement élémentaire. Un polynome croit d'autant plus vite qu'il est de degré plus élevé, donc qu'il a davantage de racines. Il faut donc étudier la croissance des fonctions si l'on veut étudier leurs zéros. Les fonctions auxiliaires $M(r)$ et $T(r)$ de M. Nevanlinna aboutissent bientôt à la curieuse loi d'équilibre due à ce dernier grâce à une invariance qui ne change pas $T(r)$ quand on remplace $f(z)$ par $1 : [f(z) - a]$. Si, des modules r, on passe à l'étude des arguments de $f(z) - a$, on arrive élégamment aux pavages dûs à M. Montel en personne. Chaque pavé a une représentation conforme sur un domaine fixe (d) en lequel il faut considérer une suite de $f_n(z)$. De là découlent la notion de famille normale, de point *irrégulier* ou *singulier collectif*. Je ne décris pas davantage mais on sent qu'ici il y a une grande idée fragmentant les difficultés.

Le premier Chapitre débutant par les formules de Green et de Poisson-Jensen qui, comme la représentation conforme, peuvent servir à des développements physiques, on obtient, avec M. Montel, une Théorie des fonctions très imagée que l'on suit comme on suivrait un enchaînement de phénomènes. Il est extrêmement remarquable d'observer avec quelle plasticité les formules initiales donnent, sans complications apparentes, des propriétés générales appartenant aussi bien aux fonctions méromorphes. Sans doute, il y a, en tout cela, un merveilleux usage de l'uniformité. Après tant et tant de travaux, tant et tant d'expositions se rapportant aux théorèmes de M. Picard, il serait singulièrement imprudent de vouloir établir un classement où l'on rechercherait la plus belle apparence des choses. Ceci n'empêche pas que M. Montel a parfaitement compris ce qu'on lui demandait à Cluj et qu'il nous donne, avec l'aide de M. Sergesco, des leçons initiatrices à recommander tout particulièrement aux néophytes.

A. Buhl (Toulouse).

Georges Bouligand. — **Introduction à la Géométrie infinitésimale directe.** Préface de M. Elie Cartan. — Un volume gr. in-8° de viii-230 pages. Prix: 36 francs. Vuibert, Paris, 1932.

Cet ouvrage, extrêmement intéressant et qui va sans doute devenir fondamental quant à l'étude d'une géométrie infinitésimale renouvelée, aurait certainement soulevé des tempêtes si l'on avait pu seulement l'esquisser il y a trente ans. Aujourd'hui il ne suscitera que des travaux et des vocations. C'est du moins ce que souhaite M. Elie Cartan, à la fin de la Préface. Mais, à propos, que pourrais-je écrire, après M. Cartan, pour présenter ce livre ?

La première opération fondamentale de la Géométrie infinitésimale classique est celle qui consiste à passer d'un point à un point infiniment voisin tout en prenant ceux-ci dans des infinités de points, lignes, surfaces ou variétés quelconques. Soyons plus modernes en parlant d'*ensembles* de points. Nombreuses sont les tentatives de géométrisation de la Théorie des ensembles mais, pendant longtemps, on a pu croire que le concept d'espace ne pouvait indéfiniment se prêter à la représentation des concepts ensemblistes de plus en plus complexes. Les espaces abstraits de M. Fréchet peuvent déjà faire revenir sur cette manière de voir. Avec M. Bouligand, on peut remarquer, plus élémentairement, que faire de la géométrie étant une opération essentiellement sélective reposant sur la notion de groupe, on se trouvera encore dans un domaine géométrique lorsque des ensembles de points et leurs points d'accumulation seront transformés en des ensembles analogues par des groupes qui resteront à préciser. Mais il n'est pas besoin d'en dire davantage pour comprendre que l'ancienne idée des points, soumis à des transformations ponctuelles, peut être considérablement élargie en celle de *concepts nouveaux*, associables à des points et transformables, avec une certaine covariance, par des groupes adéquats. Il semble même que l'on puisse avancer indéfiniment dans cet ordre d'idées en généralisant de plus en plus les *concepts nouveaux* et les groupes qui leur assurent quelque conservation totale ou partielle. Pour l'instant — et ceci est déjà plus que joli — les concepts qui s'associent aisément aux points d'accumulation sont le *contingent* et le *paratingent*. Je rappelle, avec M. Cartan, qu'en un point A d'une ligne ordinaire le contingent contient les limites des sécantes AM et que le paratingent contient les limites des sécantes MM', lorsque M et M' tendent vers A. Quant aux groupes qui conservent de telles configurations on pourra, par exemple, dans le cas de trois variables, les représenter par

$$X = f(x, y, z) , \quad Y = g(x, y, z) , \quad Z = h(x, y, z) ,$$

ces fonctions ayant des dérivées partielles du premier ordre continues et un jacobien non nul. Si l'on écrit

$$\xi = \varphi(X, Y, Z) , \quad \eta = \psi(X, Y, Z) , \quad \zeta = \varpi(X, Y, Z) ,$$

ces nouvelles fonctions auront encore des dérivées du premier ordre et c'est cela qui est la propriété groupale essentielle. On voit la largeur des hypothèses qui président à l'élaboration de la nouvelle géométrie. Il me vient même une idée que je donne ici, en passant, pour ce qu'elle vaut. L'existence des dérivées partielles du premier ordre pour les fonctions X, Y, Z ou ξ, η, ζ entraîne l'existence de déterminants fonctionnels qui assurent l'existence d'intégrales multiples et de transformations y afférentes. Dans ces conditions la G.I.D. (géométrie infinitésimale directe) pourrait avoir une origine intégrale et aurait alors un degré de généralité analogue à celui des considérations ensemblistes adjointes par M. Henri Lebesgue à la notion même d'intégrale. Il me semble d'ailleurs que, pour des raisons diverses, ceci est aussi l'opinion que M. Bouligand laisse transparaître en plusieurs endroits de son beau livre.

Quoiqu'il en soit, je n'ai indiqué jusqu'ici que quelques idées absolument essentielles. Que dire de nombreux développements tous plus intéressants les uns que les autres. D'abord le sympathique auteur ne suppose aucune connaissance préliminaire de la Théorie des ensembles. Il la reprend au début et d'une manière particulièrement intuitive puisqu'il a l'intention d'aboutir à des considérations géométriques tangibles. Quelle belle occasion de se familiariser avec le lemme de Borel-Lebesgue et les fonctions semi-continues de René Baire, avec la notion de distance de deux ensembles, avec la construction de Cantor-Minkowski et tant d'autres choses encore.

Des exercices, des sujets d'étude terminent le volume. Je crois bien que tout cela ne tardera pas à porter des fruits abondants et savoureux.

A. Buhl (Toulouse).

H. Bateman. — **Partial differential Equations of Mathematical Physics.** — Un volume relié gr. in-8° (26 × 17) de XXII-522 pages. Prix: 42 *s.* net. At the University Press, Cambridge, 1932.

Magnifique volume consacré surtout aux propriétés exactes des Equations aux dérivées partielles de la Physique mathématique. Le point de vue n'est cependant pas exclusif, l'auteur ne s'étant nullement interdit de montrer les contacts de l'exact et de l'approximatif, contacts devenus particulièrement intéressants, dans ces dernières années, avec des travaux, tels ceux de M. Nicolas Kryloff, sur lesquels il nous faudra précisément revenir ci-après.

Ce qui caractérise surtout le présent livre c'est l'uniformité des procédés variationnels, uniformité qui permet de tirer toutes les équations en litige de la considération d'une divergence. Les discussions les plus savantes, dans cet ordre d'idées, sont vraisemblablement celles de M. Th. De Donder; si elles ne sont reprises ici que d'une manière formelle et essentielle, ceci suffit, du moins, à en faire ressortir toute l'importance.

L'orthogonalisation suivant Ritz, qui devait inspirer M. Kryloff, conduit aussi à l'orthogonalisation, à éléments imaginaires conjugués, si précieuse, en Mécanique quantique, là où les considérations métriques ordinaires doivent céder le pas devant celles d'une géométrie unitaire dépendant des formes de Charles Hermite dites à indéterminées conjuguées.

Ces préliminaires posés, l'exposé débute avec les équations classiques les plus simples, telles $y'' = f(x)$, sur les solutions desquelles il faut reconnaître l'influence de conditions aux limites. C'est l'occasion de construire les développements de Fourier avec les méthodes de sommation de Cesàro-Fejér. Les oscillations libres et contraintes sont habilement combinées avec toute une analyse lagrangienne; une autre analyse symbolique, à opérateurs différentiels, lie les équations de Laplace, de D'Alembert, de Schrödinger avec les équations des théories élastiques et électromagnétiques, ces dernières conservant, probablement pour toujours, le cadre où le prodigieux génie de Maxwell sût les faire naître. A vrai dire, le cadre peut s'élargir, mais c'est toujours le même type de cadre.

Dans un second chapitre, il s'agit des théorèmes intégraux de Green et de Stokes. On sait que ces théorèmes, relatifs à des invariances, ont cependant le même pouvoir créateur que les méthodes variationnelles. On pourrait n'employer qu'eux; mieux vaut, sans doute, être éclectique et créer par deux grandes méthodes plutôt que par une seule.

La propagation de la chaleur conduit à des questions connexes sur l'humidification du bois et l'échauffement d'un corps poreux par un fluide à température plus élevée. Mais, où les méthodes à la Green triomphent, c'est surtout avec les équations des types elliptique, parabolique ou hyperbolique, équations tant illustrées par Riemann, par Darboux et, plus récemment par MM. Emile Picard, J. Hadamard, S. Bernstein, L. Lichtenstein et nombre d'autres grands géomètres. Il faut signaler aussi l'emploi du principe variationnel qui fait passer, par exemple, de formes aux dérivées partielles quadratiques du premier ordre à des formes linéaires du second ordre. C'est ainsi que l'on passe de la propagation d'un front d'onde à la propagation dalembertienne. Les équations élastiques et électromagnétiques étant reprises au clair des méthodes stokiennes, on parvient ainsi à la fin du chapitre second et à la page 203 du beau livre. C'est dire que les dix chapitres suivants seront beaucoup plus courts que les deux premiers. Néanmoins nous devons abandonner, faute de place, tout procédé d'analyse tant soit peu continu. Contentons nous de signaler des joyaux particulièrement brillants.

Ainsi, dans le Chapitre III, nous trouvons une théorie des ondes électromagnétiques dans les cristaux, théorie ou peuvent intervenir la série de Fourier, les résidus, les fonctions thêta, la fonction ζ de Riemann et, chemin faisant, une relation limite liant π et e dans le domaine réel.

Le Chapitre IV, sur la représentation conforme, traite notamment de la représentation des profils d'aile. On y trouve aussi les potentiels orthogonaux de Daniell, issus de remarquables symétries de déterminants.

Les équations à trois variables (Ch. V) utilisent surtout les solutions exponentielles à la Cauchy et les intégrales définies y attachées. L'emploi des coordonnées polaires (Ch. VI) introduit les fonctions sphériques et nombre d'opérateurs de dérivation nouveaux, tels celui de Hobson. Des fonctions d'onde homogènes conduisent, avec Stieltjes, à une équation *harmonique* étudiée par Euler et Poisson.

Les coordonnées cylindriques ou semi-polaires (Ch. VII), ellipsoïdales (Ch. VIII), paraboloïdales (Ch. IX), toroïdales (Ch. X) conduisent à un large usage d'intégrales définies des plus élégantes, de fonctions Γ et de toutes les transcendantes dont le prototype est la série hypergéométrique.

Le problème de la diffraction d'ondes planes (Ch. XI), par une arête parallèle aux fronts ou aux surfaces de phase constante, relève encore, d'après les travaux de Sommerfeld, de méthodes analytiques exactes. Et si les équations non linéaires (Ch. XII) sont des moins maniables, elles ne sont pas cependant dépourvues de propriétés exactes pouvant être rattachées, par exemple, à celles de l'équation de Riccati. Les surfaces minima riches non seulement, en propriétés exactes mais en questions non résolues, telles l'éternel problème de Plateau, sont encore là pour inciter les chercheurs à la découverte profonde, difficile et cependant élégante.

En résumé l'ouvrage, ainsi trop brièvement parcouru, est au-dessus de tout éloge. Il s'imposait pour peindre surtout le domaine *exact* à une époque où des équations de toute première importance cependant, comme l'équation de Schrödinger, ne vont pas sans quelques compromis. Il faut sans doute faire sa part au vague accompagnant nécessairement les théories probabilitaires, aux domaines corpusculaires où, comme le dit M. Louis de Broglie, les phénomènes ne peuvent se décrire qu'à demi mais, avant d'en prendre complètement son parti, on pourrait, sans danger. conseiller d'ultimes méditations à tirer du beau livre de M. Bateman.

A. Buhl (Toulouse).

H. W. Turnbull and A. C. Aitken. — **An Introduction to the Theory of Canonical Matrices.** Un volume relié gr. in-8° de XIV-192 pages. Prix: 17s. 6d. net. Blackie & Son limited. London and Glascow, 1932.

« Ce livre contient une exposition systématique de la théorie générale des matrices, théorie dont l'intérêt a été récemment très stimulé du fait de son introduction, avec grand succès, par Heisenberg et Dirac en la mécanique des quanta. »

Ceci est la traduction d'une phrase lue sur une couverture volante adjointe au volume et ces quelques mots m'ont d'abord donné l'idée d'une théorie des matrices exposée, une fois de plus, en vue de fins appartenant à la Physique théorique. Or il n'en est rien. Heisenberg et Dirac sont à peine cités dans le livre même. Au contraire Cayley, Cauchy, Sylvester, Hermite y sont grandement à l'honneur.

Il est à peine besoin de dire que cet état de choses ne me paraît mériter rien d'autre qu'une très bienveillante approbation. Noyer les matrices dans les théories ondulatoires et quantiques serait aussi inadmissible que de noyer les espaces de Riemann dans les théories d'Einstein. Et puis les matrices sont de véritables joyaux déjà quelque peu anciens. Il serait souverainement injuste de croire que leurs innombrables propriétés, toutes plus esthétiques les unes que les autres, n'ont été mises en valeur que sur le terrain physique.

Quiconque manquerait d'enthousiasme purement algébrique pourait en acquérir facilement en se fiant à la présente *Introduction*.

On sait que les matrices sont des tableaux de coefficients définissant des substitutions linéaires et homogènes. La non commutativité des produits matriciels n'est rien d'autre que la non commutativité de ces substitutions. Si l'on n'a pas, en général, $BA = AB$ ceci n'empêche pas que l'on doit pouvoir écrire $BA = AC$ avec charge de déterminer C. Or ceci donne $B = ACA^{-1}$ et ce résultat si simple est l'un des premiers aspects du problème de la canonisation. Il engendre, plus généralement, $f(B) = Af(C)A^{-1}$, f étant, par exemple un « polynome matriciel » en attendant que cet f prenne, par passage à la limite, des significations fonctionnelles plus complexes. Et maintenant toute une magnifique algèbre peut se dérouler; elle sera *associative*, *distributive*, non *commutative* mais la perte de la commutativité lui donnera l'aspect général d'une géométrie à laquelle on enlève un postulat.

A ce propos, il faut justement mentionner qu'avant de faire leurs preuves en physique, les matrices avaient brillé sur le terrain géométrique. Les réductions de formes quadratiques puis de formes à indéterminées conjuguées suffiraient à prouver l'assertion. Les deux auteurs anglais n'y manquent pas.

La notion de réduction canonique s'étend très élégamment aux matrices associées en faisceaux (pencils). La considération de ces faisceaux remonte à Weierstrass qui jugea prudent d'exclure des cas singuliers cependant facilement traités ensuite par Kronecker.

Il y a des équations matricielles comme, par exemple, $AX = XA$ et celles-ci offrent même un chemin pour parvenir à l'algèbre de Dirac. Les extrêma des formes quadratiques, les vibrations d'un système autour d'une position d'équilibre, les théories statistiques et la méthode des moindres carrés relevaient des méthodes matricielles bien avant que celles-ci n'aient été utilisées, avec éclat, sur le terrain des quanta et des ondes.

Revenons donc du côté des principes matriciels eux-mêmes; les applications ne s'en trouveront que mieux. Le bel et très commode ouvrage de MM. Turnbull et Aitken a, en outre, l'avantage de contenir beaucoup d'exercices et de renseignements historiques. C'est maintenant de la science aussi jolie que pratique.

A. Buhl (Toulouse).

B. L. van der Waerden. — **Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik.** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XXXVI). — Un vol. gr. in-8° de VIII-157 pages. Prix: broché, RM. 9; relié, RM. 9, 90. Julius Springer, Berlin, 1932.

L'auteur de cette nouvelle et élégante exposition semble s'excuser, dans sa Préface, de nous l'offrir après la publication des ouvrages similaires dûs à M. H. Weyl et à M. E. Wigner, ouvrages analysés récemment ici-même. Nous croyons qu'on lui accordera très facilement l'excuse sollicitée. Comme nous le rappelions plus haut, à propos du livre de M. Bateman, l'équation de Schrödinger ne semble pas pouvoir se séparer de quelques compromis qui ont toujours plus ou moins accompagné son élaboration.

Plutôt que de la voir au travers de la géométrie unitaire, comme le fait M. Weyl, ou derrière l'analyse matricielle, ce qui est le point de vue de

M. Wigner, ne vaudrait-il pas mieux la postuler, la considérer d'abord, indépendamment de tout procédé générateur, pour montrer ensuite que ses propriétés se développent à l'instar de celles appartenant aux espaces à métrique hermitienne, espaces où jouent aussi les substitutions et les matrices. Telle est du moins la méthode de M. van der Waerden.

Le professeur de l'Université de Leipzig part d'ailleurs de l'équation de Schrödinger la plus générale, de celle construite à partir d'une énergie hamiltonienne relative à un système d'un nombre quelconque de points. Les considérations probabilitaires habituelles s'étendent à tout l'espace en phase. On peut alors comparer aisément le cas de l'atome et celui de la molécule. A propos de l'électron en champ sphérique, l'analyse ne peut évidemment pas différer essentiellement des lignes classiques maintenant adoptées partout mais l'auteur a dessiné de claires figures des spectres de H et de Li. Quand on retrouve, plus loin (p. 99), l'élargissement de la question dû à Dirac, on comprend admirablement comment une structure fine correspond à des symétries intra-atomiques qui ne sont analytiquement maniables que quand les groupes ont, pour ainsi dire, été habillés de *représentations* convenables. On admire de plus en plus dans le cas des électrons multiples, de la structure des multiplets, de l'effet Zeeman et surtout lorsqu'on arrive aux symétries interdites de Pauli qui vont jusqu'à imposer une certaine périodicité dans le système des éléments chimiques.

Un dernier chapitre sur les spectres moléculaires semble compléter très heureusement un exposé de R. de L. Kronig: *Band Spectra and Molecular Structure*, Cambridge, 1930. Ce livre anglais ne s'inquiétait guère des groupes; ceux-ci prouvent à nouveau leur importance en lui fournissant les points d'appui les plus remarquables dans le domaine théorique.

L'analyse des symétries intramoléculaires et intra-atomiques se manifeste en tableaux, en formules, en notations intuitives et ingénieuses. Il faut, au total, moins d'effort pour assimiler le livre de M. van der Waerden que pour assimiler les connaissances correspondantes dans Weyl ou dans Wigner.

Le nouvel ouvrage ne peut être que le bienvenu.

A. Buhl. (Toulouse).

G. Gamow. — **Der Bau des Atomkerns und die Radioaktivität.** Traduction allemande, de C. u. F. Houtermans (Neue Probleme der Physik und Chemie herausgegeben von Dr. Eugen Rabinowitsch, Band I). — Un vol. in-8° de X-148 pages, avec 37 tableaux, 41 figures et une planche hors-texte. Prix: RM. 10; S. Hirzel, Leipzig, 1932.

Ce volume paraît inaugurer très heureusement une nouvelle Collection scientifique. Il s'agit indéniablement de Physique théorique rédigée de manière à mettre de nombreux renseignements à la disposition des physiciens. Et cependant il est de ceux à recommander aussi aux mathématiciens qui, sans aller jusqu'à faire des expériences d'une technique difficile, y apprendront ce qu'ils doivent respecter dans le domaine expérimental pour que leurs théories ne semblent pas sans objet phénoménal. Ceci est d'ailleurs un ordre d'idées déjà signalé à propos du livre de M. Gaetano Castelfranchi (*L'Enseignement mathématique*, t. XXIX, 1930, p. 363) bien que celui de M. G. Gamow soit moins étendu, moins encyclopédique.

Telle qu'elle est, l'œuvre est fort intéressante. Elle est écrite avec humour au sujet d'ignorances, d'indéterminations, d'incertitudes de toutes sortes en lesquelles il faut démêler de nouvelles manières de penser plutôt que des motifs de désespérance.

C'est un lieu commun, à l'heure actuelle, que de rappeler l'insuffisance de la Mécanique newtonienne à l'échelle atomique. Cela ne créerait plus de bien grosses difficultés s'il ne devait y avoir que deux mécaniques. Mais ne voilà-t-il pas que la mécanique ondulatoire ou quantique ne s'appliquerait que dans les régions superficielles de l'atome ! Plus profondément, des modifications essentielles semblent nécessaires et ne laissent guère entrevoir la vraisemblance d'une théorie unique. En tout cas, des principes newtoniens, tels celui de l'action et de la réaction, semblent complètement éliminés par certaines théories qui vont jusqu'à introduire des électrons, à masses négatives, résistant d'autant plus à l'attraction qu'ils sont plus attirés; ce sont les « électrons-ânes » (Esels-Elektronen, donkey-electrons). Certaines formules de Dirac admettent l'existence d'électrons à masse positive mais seulement pour un temps inférieur à 10^{-11} secondes. On sent combien il serait vain de demander ce qu'il y a de « vrai » dans tout cela. De telles conceptions dépendent plus que jamais des théories et des théoriciens pour n'avoir finalement qu'une valeur probabilitaire. Mais ce n'est pas une question vaine que de rechercher des liens donnant à ces conceptions le maximum de cohérence tout en admettant que l'idée de cohérence parfaite est d'une si radicale impossibilité qu'elle en devient antiscientifique. Telles sont les idées engendrées par les premières pages de l'œuvre et qui donnent indéniablement le désir d'en poursuivre l'étude. Celle-ci est facilitée par de nombreux tableaux, d'ingénieux schèmes illustrant notamment les cas de rupture du noyau atomique c'est-à-dire la radioactivité. Une analyse à la Schrödinger, d'ailleurs très originale, intéresse les « seuils » potentiels d'où, ou bien où, une particule arrive avec une énergie donnée.

Les émissions électromagnétiques, les chocs des particules relevant plus ou moins de considérations élastiques, semblent faire maintenant des théories à corpuscules, des théories d'un caractère plus fondamental que celles se rapportant à la notion d'onde. Provisoirement ce sont les émissions du type photonique qui peuvent être placées à la base de toute notion de propagation. La Physique de demain sera, sans doute, essentiellement corpusculaire si toutefois le bel exposé de M. Gamow n'indique pas que ce prétendu devenir est déjà réalisé. A. Buhl (Toulouse).

Nicolas Kryloff. — **Les Problèmes fondamentaux de la Physique mathématique et de la Science de l'Ingénieur.** — Un volume gr. in-8° de 252 pages. Prix: 7 roubles. Edition O.N.T.V.U.; Ukrkniga, rue K. Liebknecht, 44, Kharkoff, Ukraine, U.R.S.S., 1932.

Nous avons déjà eu l'occasion de dire tout le bien que nous pensions des travaux de M. Kryloff, non seulement ici, à propos du fascicule XLIX du *Mémorial des Sciences mathématiques* mais aussi dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1931, p. VII). De son côté, M. Georges Bouligand, dans la *Revue générale des Sciences* (15 février 1932) a écrit tout un article de fond pour bien marquer l'enthousiasme causé par les méthodes du mathématicien ukrainien. Celles-ci, avec l'aide de M. N. Bogoliuboff, vont donner au moins sept Monographies dont la seconde est celle dont nous avons surtout à parler aujourd'hui. L'exposé, fait en langue ukrainienne, est précédé d'un résumé français d'une vingtaine de pages qui permet d'assimiler les traits essentiels du sujet et de se retourner ensuite relativement à l'aise dans le texte étranger, en se guidant simplement sur les formules. Ces dernières, assez compliquées dans les premières recherches de M. Kryloff sont maintenant de plus en plus simples. Elles deviennent aussi de plus en plus plastiques, aussi propres à l'établissement de théorèmes d'existence qu'à la construction de solutions maniables où l'approximation obtenue est toujours majorée de près. Et même, ce qui caractérise les procédés actuels c'est d'utiliser, dans les approximations, nombre de propriétés exactes, ayant divers ordres de transcendance, mais enfin exactes, comme appartenant, par exemple, à des équations différentielles plus simples que celles dont on désire des solutions approchées.

On n'est plus alors uniquement en présence d'un réseau d'inégalités jugé rébarbatif par nombre d'esprits. C'est ainsi que les nombres et les polynomes de Bernouilli jouent des rôles nouveaux et harmonieux dans l'intégration approchée de l'équation différentielle linéaire du second ordre. Des théories de Graeffe, Laguerre, Fredholm, Poincaré, sont aussi grandement perfectionnées.

Signalons aussi la possibilité de dériver indéfiniment des approximations polynomiales (Ch. II, § 6). On sait combien la chose est scabreuse en principe.

D'autre part l'existence des fonctions caractéristiques est prouvée, par une sorte de procédé *de fermeture*, au delà de leur obtention approximative.

L'analyse harmonique, la méthode des moindres carrés, celle des moindres degrés, l'orthogonalisation spéciale d'Enskog trouvent encore de nombreuses applications. Et comme, au fond des méthodes intégrales, on retrouve toujours, plus ou moins nettement, la charpente des systèmes algébriques linéaires, ces systèmes eux-mêmes, qu'on pouvait croire cependant bien connus, sont repris à leur tour sous des formes approchées toujours particulièrement simples et maniables. Il y a ici comme une réplique, dans le domaine approximatif, des propriétés matricielles employées en Mécanique ondulatoire. D'ailleurs la Physique théorique pouvait s'enrichir de bien des choses que M. Kryloff destine à la Physique mathématique et à la Science de l'Ingénieur. Cela viendra tout naturellement, d'autant plus que le savant auteur termine en indiquant des champs de recherche des plus étendus où, sans aucun doute, il sera suivi par de nombreux disciples.

Et peut-être n'est-il pas inutile de souligner combien on peut s'enorgueillir, en U.R.S.S., de posséder des mathématiciens ayant l'autorité qui s'attache désormais au nom de M. Nicolas Kryloff.

A. BUHL (Toulouse).

NICOLAS KRYLOFF et N. BOGOLIÙBOFF. — **Recherches sur la Stabilité dynamique des Machines synchrones.** — Un volume gr. in-8° de 100 pages. Prix: 2 roubles 50.

Nous pouvons, en dernière heure, joindre à l'analyse précédente celle d'un nouveau fascicule qui semble être le quatrième dans la liste des sept promis par les éminents auteurs. Il s'agit encore d'un résumé français précédant un texte slave plus développé mais toujours riche en formules facilement saisissables.

De plus, le sujet est en rapport avec une importante communication faite au Congrès international d'Electric'té (Paris, 1932), communication qui pourrait bien donner un autre fascicule rédigé entièrement en français.

Le sujet impose la considération de l'équation non linéaire

$$\theta\theta'' + 2\delta\theta\theta' + f(\theta) = \mathrm{D}(t) .$$

Des travaux nombreux se sont bornés à linéariser l'équation ce qui ne correspond qu'au cas de petites oscillations, cas tout à fait insuffisant en pratique.

Ici, on recherche des formes de f et de D qui peuvent rendre l'équation maniable autrement qu'en lui donnant la forme linéaire. Les cas qui sont ainsi analytiquement accessibles sont remarquablement propres à jeter de précieuses lueurs sur le problème technique envisagé.

Le cas de n machines synchrones remplace l'équation ci-dessus par un système à coefficients véritablement très compliqués; cette fois, surtout pour $n > 2$, les résultats explicites tendent à devenir inaccessibles hors d'une certaine réduction du système à une forme linéaire. Mais alors l'ingéniosité des auteurs se donne remarquablement carrière en utilisant le calcul symbolique de Heaviside.

Les idées de Liapounoff sur la stabilité sont également mises à contribution.

Le plus remarquable est que l'esprit d'approximation numérique pratique transparaît, toujours. Les constructions analytiques les plus échafaudées finissent par donner quelque formule relativement simple, à coefficients numériques, ou quelque tableau formé de simples nombres. L'écart avec les vérifications expérimentales est généralement minime. Terminer ainsi semble être la raison même, la préoccupation dominante de MM. Kryloff et Bogoliùboff; et, encore une fois, ils y satisfont avec toutes les ressources du calcul analytique. L'exposé paraît s'adresser aux techniciens; il semble correspondre à des leçons faites ou à faire à un certain Institut ukrainien d'Energétique industrielle. Il s'adresse également aux géomètres étudiant les cas d'intégralité théorique de systèmes différentiels de plus en plus complexes.

A. BUHL (Toulouse).

Y. ROCARD. — **L'Hydrodynamique et la Théorie cinétique des gaz.** Préface de Henri Villat (Publications de l'Institut de Mécanique des Fluides de l'Université de Paris. Fondation du Ministère de l'Air). — Un vol. gr. in-8° de X-160 pages et 20 figures. Gauthier-Villars et C[ie], Paris, 1932.

Ouvrage extrêmement remarquable et sympathique. L'auteur n'est pas un inconnu. C'est l'un des traducteurs de Birtwistle (Voir *L'Ens. math.*, t. XXVIII, 1929, p. 328). Il est entraîné en Physique théorique et voilà justement ce qui doit intéresser.

Qui n'a remarqué que la Mécanique ondulatoire, avec ses prétentions universelles, était plus simple que l'ordinaire Mécanique des fluides relative à l'eau ou à l'air considérés à notre échelle ? Elle a, de plus, à sa disposition, tout un symbolisme beaucoup plus riche que celui de l'Hydrodynamique classique. Ne peut-on tenter d'enrichir ce dernier, d'essayer de nouveaux systèmes d'équations qui n'embrasseront peut-être pas plus que les anciens mais qui contiendront d'autres choses ? C'est là l'un des aspects de la méthode scientifique actuelle qui ne croit plus guère aux équations universelles. Les tentatives de ce genre ne sont d'ailleurs pas nouvelles mais M. Rocard nous ramène vers l'une des plus intéressantes en tentant de la corriger, de la moderniser et d'y ajouter le fruit de ses propres travaux.

On part des considérations intégrales dues à Boltzmann. Le point de vue fonctionnel essentiel concerne la distribution des vitesses, distribution pour laquelle Maxwell bâtit une hypothèse simple. Le fait immédiatement saillant est que les deux grands théoriciens permettent d'arriver, pour le mouvement d'un gaz, à des équations dont la physionomie rappelle de façon frappante celles de la Mécanique des fluides construites à partir de considérations plus courantes.

Une relation de Stokes, relative aux coefficients de viscosité, relève de la théorie cinétique et nullement de l'hydrodynamique habituelle.

Maxwell recherche partout ce qui pourrait bien être invariant par rapport à la distribution des vitesses; il aboutit ainsi à des considérations théoriquement admirables et pratiquement insuffisantes mais qui n'en fournissent pas moins une sorte de première approximation sur laquelle Enskog, d'une part, et Chapman, d'autre part, vont en greffer une seconde.

Il faut encore une nouvelle hydrodynamique, une nouvelle correction à la distribution des vitesses, dans le cas des gaz comprimés, la notion de choc moléculaire étant alors altérée. Pour les gaz raréfiés, il y a aussi insuffisance des méthodes classiques, alors que la théorie cinétique s'applique; c'est d'ailleurs la direction méthodique dans laquelle nous tendons, de plus en plus, à rapetisser l'échelle vulgaire, à étudier les parois elles-mêmes à l'échelle moléculaire au risque de constater tout à coup que nous sommes jetés hors de nos définitions préliminaires de l'état fluide. Un tel avatar n'a rien de neuf; il caractérise bien les passages d'une échelle à une autre incomparablement plus petite. En s'y heurtant M. Rocard montre combien il a cherché à aller consciencieusement au fond des choses pour n'y point trouver une théorie définitive mais seulement de nouvelles indications sur les conditions d'accord avec la réalité expérimentale. Et ce sont aussi de telles études, faites en marge des grands courants, qui, éclairant d'un jour nouveau les difficultés inhérentes à ceux-ci, y apportent des perfectionnements et des probabilités de perfectionnements impossibles à apercevoir si l'on reste toujours près des mêmes équations, dans une même région de l'analyse mathématique.

A. Buhl (Toulouse).

G. A. Bliss. — **Variationsrechnung.** Edition allemande publiée par F. Schwank. — Un volume relié de VIII-128 pages et 47 figures. Prix: R. M. 6,30. B. G. Teubner. Leipzig et Berlin, 1932.

Très élégant petit volume très heureusement condensé et qui, d'abord anglais, devait tout naturellement tenter un traducteur. Beaucoup d'esprit géométrique qui, bien entendu, peut rendre le Calcul des variations indépendant du Calcul différentiel et intégral mais qui montre que nombre de problèmes ont une structure telle qu'on conçoit *l'existence* de la solution sans calculs et cela d'une si jolie façon qu'on est tenté d'apprendre ensuite, à supposer qu'on ne le sache pas, ce qu'il faut d'analyse pour parachever une étude qu'une première intuition a révélé pleine d'attraits.

Malgré cela l'ouvrage n'est pas élémentarisé à outrance. Il va jusqu'à donner un aperçu des méthodes de Weierstrass qui fut un maître en la matière mais un maître aux conceptions tellement ardues qu'elles restèrent à peu près lettre morte jusqu'aux expositions plus maniables de Kneser, Bolza et Hadamard. Le Traité d'Analyse de M. Goursat est également cité avec éloges comme pouvant avoir un rôle initiateur particulièrement heureux, rôle auquel on peut associer celui du présent opuscule, quant à la préparation à un envol vers les gros et spéciaux ouvrages.

La cycloïde et la chaînette ont été grandement mises à contribution; elles se prêtent d'ailleurs merveilleusement à une foule de développements, très simples sur ces courbes et qu'on pourrait être tenté de considérer comme leur appartenant de manière particulière. On voit ensuite comment les choses se généralisent, comment les propriétés cycloïdales et caténoïdales étaient bien, si l'on veut, particulières mais d'un particularisme qui venait précisément d'une nature minimante.

Il n'est pas jusqu'à l'histoire du Calcul des variations que l'auteur n'ait envisagée à grands traits mais en lui laissant une physionomie fort exacte. Au total l'exposé est tout ce qu'il y a de plus maniable. Il peut éviter de recourir à de gros traités où l'on ne chercherait que le Calcul en litige et il peut aussi se greffer, le plus simplement du monde, sur des connaissances analytiques élémentaires provenant de n'importe quel enseignement.

A. BUHL (Toulouse).

P. W. BRIDGMAN. — **Theorie der Physikalischen Dimensionen.** Aenlichkeits-Betrachtungen in der Physik. Edition allemande publiée par H. Holl. — Un volume relié de VI-118 pages. Prix: R.M. 6,80. B. G. Teubner. Leipzig et Berlin, 1932.

Second et très élégant petit volume, de même aspect extérieur que le précédent et qui nous vient aussi de la science anglaise sous forme de traduction allemande. Le sujet est toutefois nettement différent. Comme l'indique le sous-titre, il s'agit de similitude en Physique, comme on dit volontiers en français. Les Anglais expriment la même chose en y mettant peut-être un peu plus d'emphase; ils emploient l'expression « Analyse dimensionnelle » mais, après l'étude d'un exposé tel que celui de M. Bridgman, on n'est pas loin de penser que cette emphase, légère d'ailleurs, est fort justifiée. Il s'agit bien d'une analyse qui ne se surajoute pas aux formules géométrico-physiques, d'une manière accessoire et dans un but de vérification partielle, mais qui est à la base même des théories à mesures et peut donner, à elle seule, une partie de ces théories. Quelle est cette partie? Le présent ouvrage nous montre qu'elle est beaucoup plus grande qu'on ne pourrait croire, encore qu'il soit entendu qu'en électromagnétisme, une bonne conception des unités et des changements d'unités soit à peu près équivalente à tout le reste. Après l'exemple classique du pendule dont la formule d'oscillation peut être établie, au facteur 2π près, par des considérations de similitude, on peut étudier de même les oscillations d'une goutte liquide sous l'influence de sa propre tension superficielle. Avec les considérations dynamiques ordinaires, cette seconde question est assez éloignée du pendule si bien que les procédés purement dimensionnels ne sont pas sans effectuer des rapprochements d'autant plus suggestifs qu'ils sont moins attendus. L'intérêt augmente avec les considérations thermodynamiques d'où, par exemple, une intéressante discussion entre Lord Rayleigh et

M. Riabouchinsky et ainsi de suite, en passant par la technique et les modèles réduits, jusqu'en Physique théorique avec les masses ou charges électroniques. Ici, la géométrie demande à être considérablement élargie, elle emprunte la Théorie des groupes, la métrique s'altère et les invariances ou plutôt les covariances dimensionnelles passent tout à fait au premier plan. Les mécaniques nouvelles, avec les quanta, ont de nouvelles et merveilleuses exigences unitaires.

A. Buhl (Toulouse).

S. Carrus. — **Cours de Calcul différentiel et intégral.** Méthode de formation au raisonnement mathématique. Livre II. Fonctions de variables complexes. Equations aux dérivées partielles. Applications géométriques. — Un volume gr. in-8° de VIII-784 pages et 27 figures. Prix: 120 francs. Librairie de l'Enseignement technique Léon Eyrolles. Paris, 1932.

Ce second volume est une digne suite du premier analysé ici même. l'an dernier (p. 176).

La méthode de formation au raisonnement intervient toujours de même, avec des symboles abondamment distribués dans le texte, symboles qui incitent à faire, à point nommé, la réflexion utile et appropriée. Quant aux matières développées, elles constituent vraiment, par leur ensemble, un grand Traité d'Analyse. Ainsi, on remarquera, dans les sous-titres ci-dessus, qu'il s'agit de fonctions de variables complexes avec ces deux derniers mots au pluriel. L'auteur a, en effet, considéré des intégrales à la Cauchy et des développements tayloriens pour le cas de deux variables imaginaires. Il associe rapidement l'étude de la fonction harmonique à celle de la fonction analytique. C'est l'occasion de manier des intégrales à la Poisson avoisinant très heureusement celles de la théorie de Cauchy. Ces dernières vont jusqu'aux théorèmes relatifs aux zéros et aux pôles des fonctions uniformes et jusqu'au théorème de d'Alembert entendu pour l'ensemble des racines d'un polynome. Les propriétés d'unicité analytique, suivant Riemann, sont bien précisées avant d'aborder des théorèmes tels que celui de Mittag-Leffler. La non-uniformité est analysée par des lacets; la fonction implicite est généralisée en des systèmes d'équations implicites à considérations d'holomorphie adéquates.

Dans les équations différentielles, signalons surtout celle de Darboux

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ \mathrm{M} & \mathrm{N} & \mathrm{P} \end{vmatrix} = 0$$

généralisant celle de Jacobi qui vient ensuite. Les équations de Clairaut et de Lagrange sont prétextes à d'ingénieux problèmes. L'équation d'Euler est traitée par deux méthodes dont l'une est d'Abel. C'est seulement en abordant les systèmes d'équations différentielles qu'on arrive aux théorèmes d'existence concernant les intégrales. Ce procédé d'attente est des plus sages; il permet de faire de l'intégration simple, à correspondances géométriques intéressantes, avant d'en avoir une permission logique générale que le débutant ne songe pas à demander. Les équations simultanées et les équations d'ordre supérieur sont classées, quant à leur formes accessibles, avec beaucoup de soin. On va jusqu'aux recherches de Fuchs, jusqu'à l'équation de Gauss,

$$(ax^2 + b\,x + c)\,y'' + (dx + e)\,y' + fy = 0,$$

aisée à mettre sous une forme canonique d'où découle la série hypergéométrique. *Les systèmes incomplets* d'équation différentielles apparaissent comme travaux personnels. Ces systèmes sont d'un maniement particulièrement simple et exigent moins de frais d'intégration que les autres. Les solutions débarrassées de toute quadrature ne sont pas les moins remarquables. Les équations aux dérivées partielles sont surtout intéressantes dans les cas non linéaires. Nous trouvons, à ce sujet, les théories à caractéristiques de Cauchy, la méthode de Lagrange et Charpit, les discussions de Bertrand et de Darboux.

Sur ce, il reste encore 260 pages pour la géométrie des courbes et des surfaces. Dans ce domaine, M. Carrus a encore fait preuve d'originalité. Il définit la développée oblique Γ, d'une courbe gauche C, comme une courbe Γ, dont les tangentes sont simplement tenues de rencontrer C. Ceci mène à des généralités relatives aux lignes tracées sur les développables, c'est-à-dire à une sorte de géométrie quasi-plane qui n'en est pas moins associée à des courbes gauches quelconques. Les relations entre la courbure et la torsion sont aussi particulièrement fouillées. Les congruences, les complexes ont une place importante. La théorie des surfaces s'inspire à la fois de Darboux et de Bianchi. Les lignes de courbure de l'ellipsoïde sont déterminées par une équation de Clairaut, comme dans le *Cours* de G. Demartres. Le ds^2 d'une développable, la cartographie, la cyclide de Dupin et le théorème du même géomètre se rencontrent en des passages pleins d'intérêt. Ce théorème, sur les systèmes triplement orthogonaux à intersections composées de lignes de courbure, est même démontré deux fois. L'un des procédés, avec deux axes rectangulaires tangents à la surface, n'implique essentiellement que l'usage de l'équation partielle $s = 0$. C'est de la belle simplicité.

Au total l'ouvrage peut former des techniciens et des théoriciens. Il représente beaucoup plus qu'un cours pouvant être professé en une année scolaire; il ouvre toutes les voies conduisant à l'utilitaire ou à l'original.

A. Buhl (Toulouse).

P. Nillus. — **Leçons de Calcul vectoriel,** à l'usage des Elèves de Mathématiques élémentaires et spéciales et des Etudiants des Facultés des Sciences et des Ecoles techniques. Tome I. Règles du Calcul. Géométrie élémentaire. Trigonométrie. Géométrie analytique. — Un volume grand in-8° de VIII-347 pages et 174 figures. Prix: 80 francs. Léon Eyrolles, Paris, 1931.

Encore un nouveau traité de Calcul vectoriel présenté par M. J. Sudria en une Préface courte mais pleine de foi. L'auteur indique avoir spécialement consulté Burali-Forti, Marcolongo, Coffin, Châtelet et Kampé de Fériet, Bouligand, Rabaté, Tresse, Bricard. Il est bien certain qu'il doit y avoir une grande théorie des quantités dirigées, qu'on peut même convenir que tout segment sera dirigé et qu'ainsi la géométrie élémentaire pourra, dès le début, prendre figure vectorielle. Avec l'adjonction de coefficients scalaires, on peut même faire, tout de suite, des théories barycentriques et parvenir aux théorèmes de Céva, de Ménélaüs, aux propriétés des quadrilatères complets. Les cercles, les sphères, la géométrie du triangle peuvent être abordées avec un esprit analogue. Telle est la voie suivie pour identifier le calcul à exposer avec les bases mêmes de la géométrie euclidienne.

Les produits vectoriel, scalaire ou mixte sont combinés avec la théorie des déterminants. Ceci est fort remarquable comme pouvant ménager, pour l'avenir, de faciles digressions sur le Calcul tensoriel. La trigonométrie sphérique profite également de telles symétries et de nombreux et élégants exercices terminent ainsi une Première Partie du volume.

La Seconde Partie est relative à la Géométrie analytique. Elle est d'abord très développée, très riche en propriétés cycliques et sphériques. Viennent ensuite les coniques avec leurs propriétés polaires. Les lieux géométriques sont présentés à l'avantage de la méthode vectorielle mais avec une ingéniosité entraînant facilement gain de cause. Mêmes remarques à propos de nombre de courbes usuelles (cycloïde, limaçon, etc.) et expositions simples pour les tangentes, les normales et la courbure. La construction des courbes quelconques est aussi vectorialisée en partant, bien entendu, d'équations vectorielles. Et cette Seconde Partie aboutit encore à une belle collection d'exercices.

La matière est délicate parce qu'elle n'a pas ou, plus exactement, parcequ'elle n'a plus sa fin en soi. Il faut songer au Calcul tensoriel qui peut atteindre les métriques les plus complexes en partant aussi de la géométrie la plus élémentaire. Ceci me ramène aux *Applications of the Absolute Differential Calculus* de A. J. McConnell dont j'ai récemment fait l'analyse ici même. J'attends avec curiosité et sympathie le Tome II de M. P. Nillus pour voir s'il ira jusque là. Les besoins de la technique ne sont pas audessous de ce désir et l'auteur du présent Tome I montre qu'il a les moyens de le réaliser.

A. Buhl (Toulouse).

E. Borel et R. Deltheil. — **La Géométrie et les Imaginaires** (Bibliothèque d'Education par la Science publiée sous la direction de M. Emile Borel).— Un volume petit in-8° de 310 pages. Prix: 30 francs. Albin Michel, Paris, 1932.

Ouvrage très original qui correspond bien à un idéal indiqué dans la Préface.

Lorsqu'on s'intéresse véritablement à la Science, on l'apprend souvent beaucoup mieux en se laissant guider plutôt par des raisons d'intérêt et de curiosité que par l'enchaînement logique des choses. Certes la logique et la rigueur ne perdent jamais leurs droits mais il sera temps d'y avoir égard après coup, quand la nécessité s'en fera sentir. Commençons par nous émerveiller. Il semble bien qu'un tel conseil ait été déjà donné autrefois par des savants comme Charles Hermite et Henri Poincaré. Repris par MM. Emile Borel et Robert Deltheil il aboutit aujourd'hui à l'élaboration d'un livre fort élégant qui semble surtout consacré, d'une part, à l'exposition élémentaire et géométrique de la notion de groupe, d'autre part aux préliminaires les plus esthétiques de la Théorie des fonctions d'une variable complexe. Et comme l'emploi de la variable complexe élucide déjà pas mal de faits géométriques, un premier et très grand intérêt apparaît, correspondant d'ailleurs au titre même de l'ouvrage. La Géométrie, même envisagée, au début, sous un aspect réel, ne se développe pleinement qu'avec un symbolisme qu'on rend peut-être un peu plus nébuleux qu'il ne convient en le qualifiant d'imaginaire mais qui, à coup sûr, n'est pas entièrement construit dans le réel. Première opposition bien faite pour éveiller la curiosité, le désir d'étudier de telles oppositions (nombreuses dans la science élevée) et même la méditation philosophique.

Sans entrer beaucoup dans les détails de l'exposition, il faut insister cependant sur tout ce qui se rapporte à la transformation homographique à variable réelle ou imaginaire. La géométrie des cercles apparait alors comme aussi simple que celle des configurations rectilignes.

Dans l'introduction à la Théorie des fonctions, des pages extrêmement intéressantes ont été écrites à propos de la notion de *coupure*. Franchir une coupure entraîne des faits singuliers, généralement discontinus mais de la nature des discontinuités de date qui s'observent aux environs de notre 180^{me} degré de longitude. Jules Verne et le Tour du Monde en 80 jours sont cités en remarquant que le voyage prendrait une allure beaucoup plus singulière encore s'il pouvait s'effectuer en moins d'une journée.

On termine sur des pages plus austères, où figure notamment le théorème fondamental de l'Algèbre, mais le propre du livre est précisément de montrer combien les faits mathématiques s'allient aisément avec ceux du domaine courant, les propriétés de pénétration de l'esprit étant mises à contribution, dans les deux cas, de manières fort analogues. Cette façon de concevoir l'analyse et la géométrie éveillera sans doute des vocations. Quoiqu'il en soit, le but éducatif de l'œuvre semble pleinement atteint.

A. Buhl (Toulouse).

R. Noguès. — **Théorème de Fermat. Son histoire.** — Un volume in-8° de 180 pages. Prix: 25 francs. Vuibert, Paris, 1932.

Il est à peine besoin de dire que le Théorème de Fermat dont il s'agit est celui qui est relatif à l'équation $x^n + y^n = z^n$ et à son impossibilité en nombres entiers dès que n surpasse 2. Ce livre va certainement rendre service aux Académies et Sociétés scientifiques diverses qui voient continuellement tomber sur leur bureau de prétendues démonstrations du diabolique théorème. Ces productions, dues à des arithméticiens d'occasion, pêchent, d'abord, et très généralement, par un manque absolu d'érudition. Chacun essaie son petit truc sans paraître se douter de l'envergure prise par les infructueuses tentatives dues à de véritables savants. On peut espérer qu'un exposé comme celui de M. Noguès incitera davantage à la prudence. Cet exposé est divisé en une partie historique et en une partie mathématique proprement dite, ce qui se comprend fort bien. L'histoire d'essais avortés peut être fort exacte et il valait mieux ne pas la confondre avec les essais eux-mêmes, brièvement reproduits, à grands traits, plutôt que discutés et analysés. C'eut été là, d'ailleurs, une tâche formidable pour laquelle il aurait fallu nombre de gros volumes.

Tous les essais que l'on peut qualifier de malheureux, du fait qu'ils n'ont point atteint le but visé, ne sont point cependant regrettables en eux-mêmes. Chez de grands mathématiciens ils ont donné nombre de résultats de haute valeur aidant à constituer l'Arithmétique supérieure, la Théorie des Nombres algébriques et celle des Idéaux, bref cette belle Science sur laquelle nous sommes récemment revenu à propos de l'ouvrage de M. Harris Hancock.

Parmi les auteurs tentés par le sujet citons Euler, Legendre, Abel, Lejeune-Dirichlet, Libri, Kummer, Lamé, Lebesgue (1840), Liouville, Cauchy, Kronecker, Genocchi, Korkine, E. de Jonquières, Catalan, Mansion, Mathews, Mirimanoff, Smith, Maillet, Hurwitz, Dickson, Wieferich, Fleck, Gouy, Fabry, Vandiver, Pomey, Mordell.

Naturellement, il est question d'Einstein. Ceci à propos d'un travail de Mordell analysé par M. Eugène Cahen. M. Cahen voit dans les travaux arithmétiques de Minkowski un acheminement vers les théories einsteiniennes, ce en quoi il a grandement raison (p. 171). C'est toujours l'histoire du Nombre qui, même en ses combinaisons les plus abstraites et les plus mystérieuses, traduit fatalement quelque aspect des harmonies universelles.

A. Buhl (Toulouse).

Panajiotis Zervos. — **Le Problème de Monge** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. LIII). — Un fascicule gr. in-8° de 56 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1932.

Problème qui, au premier aspect, est un problème d'équations différentielles indéterminé puisque, par exemple, il pose l'unique équation $f(x, y, z, y', z') = 0$ pour deux fonctions inconnues, de x, soient y et z. Nous étions dans des questions de ce genre, plus haut, à propos des *systèmes incomplets* de M. Carrus. A l'équation $f = 0$, on peut faire correspondre une équation, en x, y, z, p, q, qui, par rapport à $f = 0$, joue un rôle tangentiel. Mais les équations de Monge sont imposées par la Géométrie; il y a intérêt à comprendre leur rôle propre et à les intégrer par des méthodes qui leur soient véritablement adéquates. Il y a même une indéniable élégance dans les procédés respectivement appliqués par Euler et par Darboux à

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 , \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

et, pour le cas général en x_i, dx_i, homogène en dx_i, il ne faut point méconnaitre les nombreux efforts, très directs, dûs à d'éminents géomètres tels Beudon, Cartan, Goursat, Hadamard, Hilbert, Lie, Serret, Vessiot, Weber, sans oublier M. Zervos lui-même.

Il y a des systèmes de Monge et des équations de Monge d'ordre supérieur en x_i, dx_i, $d^2 x_i$. Ils ont surtout été l'objet des travaux de M. Goursat. Des cas d'impossibilité très généraux ont été signalés par M. Hilbert; ils montrent l'insuffisance du procédé tangentiel signalé en premier lieu. M. Elie Cartan a beaucoup étendu la question en recherchant une équivalence entre le Problème de Monge et l'intégration d'un système de Pfaff. Les formes *dérivées* interviennent, la question avoisine les formules de Stokes générales et il faut créer la notion de système *spécial* pour en pouvoir concevoir l'intégration explicite.

Quant à la correspondance entre équations de Monge et équations aux dérivées partielles elle a également donné lieu à d'importants travaux de M. Vessiot où interviennent des faisceaux de transformations infinitésimales et des faisceaux *dérivés* dépendant de crochets (X_i, X_h) donnant naissance à une *structure*. Ce sont là procédés de la Théorie des groupes utilisée aussi au fond, par M. Cartan. Le sujet, on le voit, est à faces multiples. Il est fort propre à réaliser, dans le domaine tangible, nombre de constructions d'apparence abstraite.

A. Buhl (Toulouse).

S. Mandelbrojt. — **Les Singularités des Fonctions analytiques représentées par une série de Taylor** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. LIV). — Un fascicule gr. in-8° de 56 pages Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1932.

Faut-il rappeler comment un tel sujet s'est introduit dans la Science ?. Qui ne connait la prodigieuse importance de la Thèse de M. Jacques Hadamard et du volume sur *La Série de Taylor et son prolongement analytique* publié, dans la Collection *Scientia*, en 1901. Une seconde édition suivit, en 1926, avec la collaboration de M. Mandelbrojt; un second volume était même promis. Mais il eût été bien dommage que le *Mémorial* ne contint pas un fascicule sur la question; nous l'avons maintenant à partir de la formule de Cauchy, de la notion même d'analyticité, bref, à partir d'un point de vue élémentaire. La question ne cesse que trop rapidement de l'être. Ecrire:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - \alpha) + a_2(z - \alpha)^2 + \dots ,$$

considérer a_n comme une fonction de n dont on doit déduire les propriétés et notamment les singularités de $f(z)$, voilà un problème d'apparence simple recélant cependant des difficultés dont nous sommes loin de dominer l'ensemble. Il débute par la question de convergence qui peut revenir à déterminer le point singulier de $f(z)$ le plus proche de α; les singularités polaires multiples, sur le cercle de convergence C, ont donné lieu à un critère où les a_n figurent en un déterminant. A un point singulier *essentiel*, sur C, correspond a_n fonction entière de n; cette assertion est le prototype de résultats variés dûs à Leau, Fabry, Soula. La multiplication des singularités (Hadamard) peut être basée sur une élégante intégrale curviligne à la Parseval; les étoiles de Mittag-Leffler commencent à apparaître. Un théorème d'Hurwitz-Pincherle correspond à une transformation d'Euler; il est généralisé par un théorème de Lindelöf-Mandelbrojt. Jusqu'ici on recherche encore la simplicité des singularités, sur C, mais voici maintenant le cas de C coupure avec, par exemple, le curieux théorème de Fatou-Pólya sur les changements de signe des a_n, changements qui font de C une coupure. Les lacunes, dans les a_n, se conservant évidemment par intégration et par dérivation, engendrent, par ce seul fait, une analyticité lacunaire riche en résultats. Et les lacunes, dans les a_n, ne sont que les cas particuliers de propriétés arithmétiques difficiles mais bien intéressantes à traduire en propriétés de $f(z)$. Riche bibliographie. Instrument de travail à recommander de manière toute particulière, aux jeunes et puissants esprits.

A. Buhl (Toulouse).

L. Dunoyer. — **Les émissions électroniques des couches minces** (Mémorial des Sciences physiques dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. XX). — Un fascicule gr. in-8° de 72 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1932.

Il s'agit surtout de descriptions expérimentales. La théorie est encore à naître. La photo-électricité est pleine de mystères bien qu'au premier abord le bombardement photonique semble devoir, tout naturellement, provoquer des démolitions électroniques.

Mais il ne faut pas peu d'habileté pour préparer les terrains susceptibles d'être démolis si bien que les techniques individuelles sont plus remarquables par leur diversité que par quelque généralité méthodique restant précisément à fixer. Le fascicule de M. Dunoyer y aidera.

Il est d'abord difficile d'obtenir des couches minces ayant pour idéal la couche monomoléculaire; ceci porte à rechercher des procédés sensibilisateurs pour des couches un peu plus épaisses mais ces procédés eux-mêmes dépendent surtout jusqu'ici de tâtonnements heureux. Enfin, s'il est indiqué de rapprocher les phénomènes photo-électriques des phénomènes thermioniques, l'ensemble ainsi constitué laisse surtout à espérer.

A tous ces points de vue, la Science ne peut être actuellement que descriptive; les formules y sont encore fort rares. Toutefois il y a d'intéressants graphiques dont certains ont assez d'analogies pour laisser pressentir la proximité d'une formule.

Chose fort remarquable, toutes ces considérations, qu'on pourrait croire plutôt abstraites, se développent en Angleterre et en Amérique dans les laboratoires des compagnies industrielles. On sent que des merveilles telles que la télévision ou la cinématographie parlante sont liées à la cellule photo-électrique; là où le physicien pur attend des lueurs nouvelles sur le monde des photons et des électrons, le technicien, l'impresario même attendent le prodige nouveau qui demain captivera les foules. Et ces derniers ont tout aussi raison que le savant possédé de la seule soif de connaître. Presque tous les travaux analysés par M. Dunoyer ont moins de dix ans d'âge et ouvrent des horizons insoupçonnés. Si la coordination logique n'apparaît pas encore, on peut cependant faire confiance au sujet. Il s'ordonnera peut être quand il nous aura offert de nouvelles fantasmagories que l'habitude rendra rapidement banales. Il est, dès maintenant, l'un des plus brillants de la Physique corpusculaire.

A. Buhl (Toulouse).

Jean Villey. — **Introduction à l'étude de la Résistance des Matériaux.** Préface de M. A. Caquot. (Mémorial des Sciences Physiques dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. XXI). — Un fascicule gr. in-8° de 76 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1932.

Le fascicule est précédé d'un avertissement tentant de le distinguer des fascicules précédents; il ne viserait pas à l'originalité mais simplement à la mise au point pédagogique d'une question classique. Cette note semble peu utile. La Résistance des matériaux est souvent traitée comme une parente pauvre des théories élastiques; on y omet des choses fondamentales jugées non à la portée d'architectes ou de techniciens à préparation mathématique insuffisante. L'exposition de M. Jean Villey tend à faire cesser ce scandale; elle est logiquement enchaînée à partir des déformations réversibles, des conditions d'équilibre écrites pour de petites portions convenablement découpées dans un solide. La Préface de M. A. Caquot, Directeur général technique de l'Aéronautique, abonde dans ce sens et insiste notamment sur le rôle préliminaire de la réversibilité quant à une étude, ultérieure et profonde, des déformations persistantes.

Les équations de l'équilibre élastique sont remarquablement symétriques et se prêtent à des tâtonnements intelligents, à des approximations simplificatrices qui peuvent se discerner avec un art véritable, notamment dans le cas des flexions d'une barre. Le cas de la traction fait apparaître simplement les rôles du module d'Young, de la loi de Hooke, du coefficient de Poisson et la notion d'énergie élastique. Après la compression, on arrive tout naturellement à la flexion qui suppose des fibres allongées et des fibres raccourcies.

La conception de la fibre neutre et son introduction dans les approximations ont un caractère géométrique simple précédant des équations différentielles qui, ainsi, ne semblent pas arbitrairement simplifiées. La Mécanique rationnelle prête, de même, ses méthodes, toujours approchées par rapport à la réalité, pour fournir les liaisons *isostatiques* d'où, ensuite, les liaisons *hyperstatiques* traitées par additivité.

Bref, c'est précisément parce que la Mécanique rationnelle n'est toujours qu'approchée par rapport au réel qu'on peut faire de la Résistance des matériaux une sorte de Statique, cohérente et pleine d'intérêt, à méthodes meilleures, quant au degré d'approximation, et qui, convenablement exposées, ne doivent donner aucune impression d'abâtardissement. Tel semble être le but poursuivi et élégamment atteint par M. Villey.

A. Buhl (Toulouse).

Konrad Knopp. — **Funktionentheorie.** II. Anwendungen und Weiterführung der allgemeinen Theorie (Sammlung Göschen, 703) Quatrième édition améliorée. — Un vol. in-16, relié, de 138 pages et 7 figures. Prix: RM. 1,80. Walter de Gruyter & Co. Berlin, Leipzig, 1931.

Elégant petit volume qui, comme de nombreux frères, incite partout à l'étude. Il tient aisément dans une poche même en y voisinant avec d'autres objets et cela ne l'empêche pas de représenter de la science élevée qui peut ainsi accompagner ses adeptes de la façon la plus familière. Il s'agit d'ailleurs d'un tome second faisant suite à un tome premier publié dans la même Collection sous le numéro 668. Il est question maintenant des fonctions entières, considérées surtout à partir du théorème de Weierstrass sur la décomposition en facteurs. C'est l'occasion d'étudier le sinus, sous cet aspect, puis la fonction σ, puis les fonctions entières incluses dans Γ (z). Les fonctions méromorphes, avec le théorème de Mittag-Leffler, conduisent de même à la fonction $\wp$ puis à de nouvelles adjointes de Γ et, de même, à la fonction ζ de Riemann. Des aperçus pénétrants et simples sur les fonctions à période unique aboutissent, très naturellement, aux fonctions doublement périodiques, y compris, par exemple, le classique théorème d'addition.

Les fonctions multiformes évoluent immédiatement sur la surface de Riemann.

La surface à deux feuillets, la plus simple, a été construite, en papier probablement, puis photographiée d'où une figure qui fait encore mieux image que les croquis bien connus dûs à Paul Appell et à M. Edouard Goursat. Ces derniers savants sont cités ainsi que Camille Jordan et M. Emile Borel pour ne parler que des auteurs français. Vraiment il est surprenant au possible que tant de choses fondamentales, sans rien perdre ni de leur rigueur ni de leur beauté, soient condensées en si peu d'espace.

A. Buhl (Toulouse).

Konrad Knopp. — **Aufgabensammlung zur Funktionentheorie.** I. Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie (Sammlung Göschen, 877) Deuxième édition améliorée. — Un vol. in-16, relié, de 135 pages. Prix: RM. 1,80. Walter de Gruyter et Co. Berlin, Leipzig, 1931.

Autre petit volume inspirant d'abord les mêmes réflexions matérielles que le précédent. Puis viennent les réflexions mathématiques qui ne sont pas moins favorables. Le livre est un Recueil de problèmes se rapportant surtout aux deux opuscules publiés par l'auteur dans la Collection Göschen et relatifs à la Théorie des Fonctions. Pour ce qui est de la représentation conforme, c'est M. Ludwig Bieberbach qui sert de guide. Des développements plus complets supposent aussi qu'on ait recours à une Seconde Partie publiée, dans la même Collection, sous le numéro 878.

Ici nous avons 38 pages d'énoncés suivies de 91 pages de solutions. Il s'agit de la représentation complexe, des séries, des fonctions de z, des lemmes intégraux à la Cauchy, des séries entières et, enfin, de la représentation conforme.

On ne peut évidemment entrer dans le détail de ces exercices qui exigent, en général, très peu de calcul mais, en revanche, un usage net et subtil des définitions, telles celles de la continuité, de la convergence uniforme, etc.

Les notations, soigneusement choisies une fois pour toutes, sont encore une cause d'abréviation. Bref, petit livre qui contient de quoi faire du bon travail et de grands développements.

A. Buhl (Toulouse).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

Atti del Congresso internazionale dei Matematici. Bologna, 3-10 Settembre 1928 (VI). Tomo VI. Communicazioni, Sezione IV A, V et VII. — Un vol. de 554 pages, avec de nombreuses figures. Nicola Zanichelli, Bologne.

Actualités scientifiques et industrielles. Exposés de Physique théorique, publiés sous la direction de L. de Broglie. Fascicules in-8°, en vente séparément. Librairie scientifique Hermann et Cie, Paris. — Voici la liste des cinq premiers fascicules de cette série :

I. L. de Broglie. — *Sur une forme plus restrictive des relations d'incertitude*, d'après MM. Landau et Peierls. — 24 p.; 6 fr.