UN CAS PARTICULIER DU THÉORÈME DE CLIFFORD

Autor(en): **Tzitzéica, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1932)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-24622

d'où, en remarquant que $T_1 = \operatorname{arc\,tg} t$,

$$T_3 = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3t}{8(1+t^2)} + \frac{3}{8} \operatorname{arc\,tg} t \ .$$

Finalement

$$T_3 - T_4 = \frac{t[3(1+t^2)^2 + 2(1+t^2) - 8]}{48(1+t^2)^3} + \frac{1}{16} \operatorname{arc\,tg} t \ .$$

La fraction constituant le premier terme du second membre s'annulant pour $t = 0$ et $t = \infty$, et arc tg t prenant les valeurs 0 et $\frac{\pi}{2}$ pour $t = 0$ et $t = \infty$, la valeur de S est donc

$$S = \frac{\pi}{4} a^2 \ .$$

C'est l'aire du cercle γ.

La courbe d'Archytas admettant, comme le cylindre et le tore, les plans Oxy et Oxz pour plans de symétrie, ce résultat peut s'enoncer comme suit:

Les projections d'une courbe d'Archytas sur ses deux plans de symétrie ont des aires égales; propriété qui semble n'avoir pas été remarquée jusqu'ici.

UN CAS PARTICULIER DU THÉOREME DE CLIFFORD

PAR

G. TZITZÉICA (Bucarest).

---

1. — On connaît le théorème de CLIFFORD, généralisation admirable du théorème de MIQUEL. Celui-ci se rapporte à un quadrilatère: Les cercles circonscrits aux quatre triangles, obtenus en supprimant successivement chaque côté du quadrilatère, passent tous par un même point, le point de Miquel du quadrilatère.

Si on considère, dans un plan, cinq droites, les points de Miquel des cinq quadrilatères, qu'on obtient en laissant de côté successivement chacune des cinq droites, sont situés sur un même cercle.

Pour un groupe de six droites, on a six cercles passant par un même point.

En général, pour un groupe de $2n$ droites, on a $2n$ cercles passant par un point; pour un groupe de $2n+1$ droites, on a $2n+1$ points situés sur un même cercle.

C'est là le *théorème de Clifford.* On peut donner à ce théorème une autre forme, en appliquant à la figure une inversion par rapport à un point quelconque du plan.

Au lieu d'un groupe de points, on aura un groupe de cercles passant tous par un même point. C'est sous cette forme du théorème de Clifford que nous allons envisager un cas particulier remarquable.

2. — Etant données n quantités complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ de même module

$$|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = \mathrm{R} ,$$

nous allons prouver qu'on peut lire sur l'expression

$$z = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

le théorème de Clifford, dans le cas particulier où tous les cercles passant par l'origine ont le même rayon R.

Pour arriver à lire géométriquement le cas général, où n est un nombre entier et positif quelconque, nous étudierons successivement les cas $n = 1, 2, \ldots$.

3. — Prenons d'abord le cas $n = 1$. On a

$$z = z_1 ;$$

c'est un point situé sur le cercle de centre O (origine des axes) et de rayon $|z_1| = \mathrm{R}$. On peut considérer ce point comme le centre d'un cercle passant par l'origine et ayant, par conséquent, le rayon R.

Passons maintenant au cas $n = 2$. On a alors

$$z = z_1 + z_2 , \qquad |z_1| = |z_2| = \mathrm{R} .$$

Comme

$$|z - z_1| = |z - z_2| = |z_1| = |z_2| = \mathrm{R} ,$$

le point z est le second point commun aux cercles ayant pour centres z_1 et z_2 et passant par l'origine.

Dans le cas $n = 3$, on a

$$z = z_1 + z_2 + z_3 \,, \qquad |z_1| = |z_2| = |z_3| = R_3 \,,$$

il y a donc trois cercles égaux C_1, C_2, C_3 passant par l'origine et ayant pour centres z_1, z_2, z_3. D'autre part, on a

$$|z - z_2 - z_3| = |z - z_3 - z_1| = |z - z_1 - z_2| = R \,.$$

On en conclut que le point z est le centre du cercle C_{123} passant par les points communs, en dehors de l'origine, des cercles C_1, C_2, C_3 pris deux à deux.

4. — Pour $n = 4$ nous arrivons au cas particulier qui correspond au théorème de Miquel. On a, dans ce cas,

$$z = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \,, \qquad |z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4) = R \,.$$

Il y a donc quatre cercles égaux C_1, C_2, C_3 et C_4, passant par l'origine et ayant les points z_1, z_2, z_3, z_4 pour centres. On aura aussi quatre cercles, égaux eux aussi, passant par les points d'intersection, en dehors de l'origine, des cercles C_1, C_2, C_3, C_4 pris trois à trois. Nous désignerons ces cercles par C_{234}, C_{134}, C_{124}, C_{123}.

Comme on a

$$|z - z_2 - z_3 - z_4| = |z - z_1 - z_3 - z_4| = |z - z_1 - z_2 - z_4|$$
$$= |z - z_1 - z_2 - z_3| = R \,,$$

le point z est un point commun aux quatre cercles C_{234}, C_{134}, C_{124}, C_{123}, c'est le point de Miquel du quadrilatère circulaire formé par les cercles C_1, C_2, C_3 et C_4. Nous désignons ce point par P_{1234}.

Considérons actuellement le cas $n = 5$, donc

$$z = z_1 + z_2 + \dots + z_5 \,, \qquad |z_1| = |z_2| = \dots = |z_5| = R \,.$$

On a donc les cinq cercles égaux C_1, C_2, .., C_5 passant par l'origine. Pour chaque groupe de quatre de ces cercles, il y a un point de Miquel correspondant. Comme on a

$$|z - z_2 - z_3 - z_4 - z_5| = |z - z_1 - z_3 - z_4 - z_5| = \dots = \mathrm{R},$$

le point z est le centre d'un cercle de rayon R et passant par les points P_{2345}, P_{1345}, ..., et que nous désignerons par C_{12345}.

Pour $n = 6$ on aura six cercles égaux C_1, C_2, ..., C_6, passant par l'origine et le point

$$z = z_1 + z_2 + \dots + z_6$$

sera commun aux six cercles C_{23456}, C_{13456}, ..., égaux eux aussi. On peut continuer ainsi indéfiniment.

Le théorème de Clifford, dans le cas particulier que nous avons envisagé, est complètement démontré. On constate de plus que tous les cercles qui interviennent successivement dans la figure sont égaux entre eux.

DISCRIMINATION AU MOYEN DE LA NOTION DE PARATINGENT D'UNE CATÉGORIE DE CONTINUS QUI SONT DES COURBES

PAR

M. Georges Bouligand (Poitiers).

---

1. — Soit O un point d'accumulation de l'ensemble ponctuel E. Une droite VV′ passant par O est dite une *paratingente* de E en O s'il existe une suite infinie de cordes P_iQ_i de E tendant vers VV′ lorsque leurs extrêmités tendent vers O.

J'ai montré l'utilité du *paratingent* (ou collection des paratingentes) pour la sélection de classes étendues de variétés à p dimensions dans un espace euclidien à $p + q$ dimensions [1]. D'une

---

[1] G. Bouligand. — Sur quelques applications de la Théorie des ensembles à la géométrie infinitésimale. — *Bull. Ac. Polon. Math.*, série A, année 1930, p. 410.