SUR CERTAINES CORRESPONDANCES

Autor(en): **Papillon, Pierre**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1932)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-24624

SUR CERTAINES CORRESPONDANCES

PAR

Pierre PAPILLON (Prytanée militaire de La Flèche).

---

1. — Il est utile parfois de revenir sur des sujets connus; à de nouvelles lectures se découvrent certains développements, certaines généralisations primitivement inexplorés: c'est ainsi que ces quelques pages sont nées d'un article fort intéressant de M. P. VINCENSINI, publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, il y a quelque cinq ans, et que, dernièrement, je relisais [1].

I.

2. — Deux courbes (C) et (C′) étant données, respectivement décrites par les points M et M′, tout point μ qui divise le segment MM′ dans un rapport déterminé a pour lieu géométrique une surface (S_μ) d'équations paramétriques

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= \frac{x + ax'}{1 + a} , \\ \eta &= \frac{y + ay'}{1 + a} , \\ \zeta &= \frac{z + az'}{1 + a} ; \end{aligned} \right. \qquad (1)$$

en ces expressions, les fonctions x, y, z du paramètre u sont les

---

[1] *Sur les couples de contours fermés de même longueur et de même surface;* 6^{me} série, tome II, pages 199-202, 1927.

coordonnées de M, les fonctions x', y', z', du paramètre v, celles de M′ et il est enfin posé

$$a = -\frac{\overline{\mu m'}}{\overline{\mu m}} .$$

Les équations (1), mises sous les formes

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{1+a}x + \frac{2a}{1+a}x'\right] , \\ \eta &= \ldots\ldots\ldots , \\ \zeta &= \ldots\ldots\ldots , \end{aligned}\right.$$

montrent que (S_μ) est une *surface de translation* [1] dont les courbes fondamentales sont les transformées de (C) et de (C′) dans les homothéties

$$\mathcal{H}\left(O , \frac{a}{1+a}\right)$$

et

$$\mathcal{H}\left(O , \frac{2a}{1+a}\right) ;$$

les courbes coordonnées forment donc un réseau conjugué, assertion qu'on vérifie, après avoir calculé les dérivées partielles

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{1}{1+a} \cdot \frac{dx}{du} , \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{a}{1+a} \cdot \frac{dx'}{dv} ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

et les termes essentiels

$$\left|\begin{aligned} \mathrm{A}\, du \,.\, dv &= \frac{a}{(1+a)^2}(dy \,.\, dz' - dz \,.\, dy') , \\ \mathrm{B}\, du \,.\, dv &= \ldots\ldots\ldots\ldots , \\ \mathrm{C}\, du \,.\, dv &= \ldots\ldots\ldots\ldots , \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$\left|\begin{aligned} \mathrm{E}\, du^2 &= \frac{1}{(1+a)^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2) , \\ \mathrm{F}\, du \,.\, dv &= \frac{a}{(1+a)^2}(dx \,.\, dx' + dy \,.\, dy' + dz \,.\, dz') , \\ \mathrm{G}\, dv^2 &= \frac{a^2}{(1+a)^2}(dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) , \end{aligned}\right. \tag{3}$$

[1] Sophus LIE: *Mathematische Annalen*, XIV, p. 332.

par l'identique nullité de l'expression

$$\frac{\partial A}{\partial u} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial C}{\partial u} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial v}$$

proportionnelle à

$$\Sigma (d^2 y \,.\, dz' - d^2 z \,.\, dy')\, dx' \,.$$

3. — *Correspondance par surfaces équivalentes.* — L'expression de l'aire élémentaire sur (S_μ) est

$$d\sigma_\mu = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

ou

$$d\sigma_\mu = \frac{|a|}{(1+a)^2} \sqrt{\Sigma (dy \,.\, dz' - dz \,.\, dy')^2} \;;$$

elle est donc la même pour les surfaces nées des points μ et μ' tels que

$$\frac{|a|}{(1+a)^2} = \frac{|a'|}{(1+a')^2}$$

c'est-à-dire, a' différant de a, que

$$a \,.\, a' = 1 \;:$$

ces points sont contraposés pour le milieu du segment MM'.

4. — *Correspondance par arcs équivalents.* — L'expression de l'arc élémentaire sur (S_μ) est telle que

$$ds_\mu^2 = E du^2 + 2F du \,.\, dv + G dv^2 \,,$$

soit

$$ds_\mu^2 = \frac{1}{(1+a)^2} [(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2a \Sigma dx \,.\, dx' + a^2 (dx'^2 + \ldots)] \,.$$

La correspondance précédente ne se poursuit pas en général, les relations

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{(1+a)^2} &= \frac{1}{(1+a')^2} \,, \\ \frac{a}{(1+a)^2} &= \frac{a'}{(1+a')^2} \,, \\ \frac{a^2}{(1+a)^2} &= \frac{a'^2}{(1+a')^2} \,, \end{aligned} \right. \tag{4}$$

n'étant simultanément réalisées que pour

$$a = a' \ ;$$

mais si les arcs conjointement décrits par M et M′ s'équivalent,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

et les égalités

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1 + a^2}{(1 + a)^2} = \dfrac{1 + a'^2}{(1 + a')^2} \\ \dfrac{a}{(1 + a)^2} = \dfrac{a'}{(1 + a')^2} \end{array} \right. \tag{5}$$

sont simultanément satisfaites quand

$$a \, . \, a' = 1 \ ,$$

c'est-à-dire avec les couples (μ, μ') contraposés pour le milieu du segment MM′.

5. — *Correspondance conservant la courbure totale.* — Etant posé

$$\rho = \frac{\mathcal{R}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \ ,$$

les rayons de courbures principaux $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont obtenus au moyen de l'équation

$$\rho^2 \Sigma A \frac{\partial (B \, , \, C)}{\partial (u \, , \, v)} + \rho \ldots + (A^2 + B^2 + C^2) = 0$$

de sorte que la courbure totale de (S_μ) en μ possède la valeur

$$\frac{\sum A \dfrac{\partial (B \, , \, C)}{\partial (u \, , \, v)}}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} = \frac{\dfrac{a^3}{(1 + a)^6}}{\dfrac{a^4}{(1 + a)^8}} \mathcal{F} (u \, , \, v) = \frac{(1 + a)^2}{a} \mathcal{F} (u \, , \, v) \ ,$$

$\mathcal{F}$ étant une fonction qu'il est inutile ici de préciser; cette courbure est la même pour les surfaces nées des points μ et μ' contraposés pour le milieu du segment MM′ car la relation .

$$\frac{(1+a)^2}{a} = \frac{(1+a')^2}{a'}$$

n'est encore vérifiée que si

$$a \,.\, a' = 1 \,.$$

6. — *Conclusion.* — En résumé:

Si deux points M *et* M′ *décrivent deux courbes quelconques données, il s'établit entre les points* μ *et* μ' *de la droite* MM′, *contraposés pour le milieu du segment* MM′, *une correspondance superficielle conservant l'aire et la courbure totale; si, de plus, les arcs simultanément décrits par* M *et* M′ *ont même mesure, de même ceux que décrivent* μ *et* μ'.

Application. — « Imaginons que M et M′ décrivent deux surfaces applicables quelconques (S) et (S′), en restant homologues dans l'application. μ et μ' décrivent alors, d'après ce qui précède, deux surfaces (S_μ) et $(S_{\mu'})$ telles que deux arcs homologues quelconques soient égaux: (S_μ) et $(S_{\mu'})$ sont applicables. A tout couple de surfaces applicables la construction géométrique indiquée ci-dessus en fait donc correspondre une infinité d'autres » *(loc. cit.)*.

7. — Prenons deux courbes (C) et (C′) fermées et de même longueur l, décrites par M et M′ simultanément; la courbe que trace alors μ sur la surface (S_μ) se ferme et sa projection sur le plan xOy limite une aire

$$\int_0^l (\eta\, d\xi - \xi\, d\eta) = \frac{1}{(1+a)^2}\int_0^l \left| \begin{array}{l} (y\,dx - x\,dy) \\ + a\,(y'\,dx + y\,dx' - x'\,dy - x\,dy') \\ + a^2\,(y'\,dx' - x'\,dy') \end{array} \right.$$

en supposant les diverses coordonnées exprimées à l'aide de l'arc de (C), par exemple. Cette aire est la même pour les points μ et μ' dont les paramètres a et a' vérifient précisément les relations (4); nous les savons incompatibles, a' différant de a. Mais si

$$\int_0^1 y\,dx - x\,dy = \int_0^l (y'\,dx' - x'\,dy') \,,$$

c'est-à-dire si les projections de (C) et de (C′) sur xOy enferment des surfaces équivalentes, les conditions précédentes font place aux égalités (5), vérifiées pour

$$a \,.\, a' = 1 \,.$$

Ainsi:

Si deux points M *et* M′ *décrivent simultanément deux courbes fermées de même longueur et dont les projections sur un plan bordent des surfaces équivalentes, les courbes décrites par les points* μ *et* μ' *de la droite* MM′, *contraposés pour le milieu du segment* MM′, *jouissent des mêmes propriétés.*

La proposition s'applique particulièrement au cas de la correspondance par arcs équivalents sur des courbes fermées de même longueur; les lieux de μ et de μ' ont, en outre, même longueur.

II.

8. — Plaçons-nous maintenant dans le domaine de la géométrie plane et soit le point μ transformé du point M′ par l'homothétie-rotation de centre M et de rapport complexe r_α (fig. 1); l'égalité vectorielle

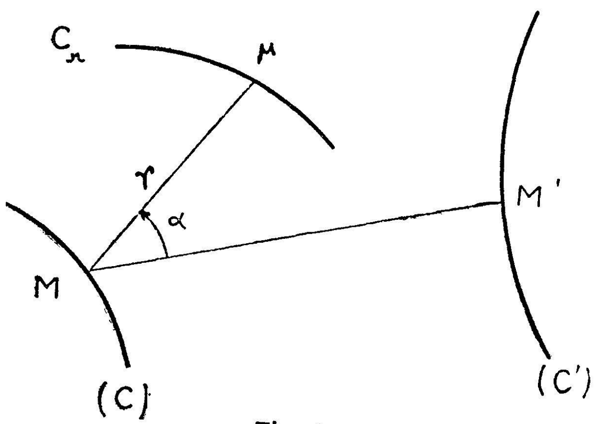

Fig 1

$$\overrightarrow{M\mu} = r_\alpha \,.\, \overrightarrow{MM'}$$

s'écrit encore

$$\overrightarrow{O\mu} = \overrightarrow{OM} + r_\alpha(\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM})$$

et, par suite,

$$\xi + i\eta = (x + iy) + (r\cos\alpha + ir\sin\alpha)\,[(x' - x) + i(y' - y)]:$$

finalement, les coordonnées de μ sont

$$\begin{cases} \xi = x + r[(x' - x)\cos\alpha - (y' - y)\sin\alpha] , \\ \eta = y + r[(x' - x)\sin\alpha + (y' - y)\cos\alpha] . \end{cases}$$

Par suite

$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = \frac{dx}{du} + r\left(-\frac{dx}{du}\cos\alpha + \frac{dy}{du}\sin\alpha\right) ,$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial v} = r\left(\frac{dx'}{dv}\cos\alpha - \frac{dy'}{dv}\sin\alpha\right) ,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial u} = \frac{dy}{du} + r\left(-\frac{dx}{du}\sin\alpha - \frac{dy}{du}\cos\alpha\right) ,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial v} = r\left(\frac{dx'}{dv}\sin\alpha + \frac{dy'}{dv}\cos\alpha\right) ,$$

et les coefficients, pour cette surface plane que décrit le point μ, sont

$$\begin{cases} A = 0 , \\ B = 0 , \\ C\,du\,dv = r\sin\alpha\,(dx\,dx' + dy\,dy') + r(\cos\alpha - r)(dx\,dy' - dy\,dx') \end{cases}$$

$$\begin{cases} E\,du^2 = (r^2 - 2r\cos\alpha + 1)(dx^2 + dy^2) , \\ F\,du\,.\,dv = r(\cos\alpha - r)(dx\,dx' + dy\,dy') - r\sin\alpha\,(dx\,dy' - dy\,dx'), \\ G\,dv^2 = r^2(dx'^2 + dy'^2) . \end{cases}$$

9. — *Correspondance par surfaces équivalentes.* — La surface élémentaire décrite par μ sur le plan a pour aire

$$d\sigma_\mu = |C\,du\,dv|$$

ou bien

$$d\sigma_\mu = |r\sin\alpha\,(dx\,dx' + dy\,dy') + r(\cos\alpha - r)(dx\,dy' - dy\,dx')| .$$

Cette aire est la même pour les points μ et μ' tels que

$$\begin{cases} r\sin\alpha = \pm r'\sin\alpha' , \\ r(\cos\alpha - r) = \pm r'(\cos\alpha' - r') , \end{cases}$$

ou que

$$\frac{r}{\sin\alpha'} = \frac{r'}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin(\alpha + \alpha')} ;$$

il est immédiat de constater que les points μ et μ' ainsi définis sont contraposés pour la médiatrice du segment MM'.

10. — *Correspondance par arcs équivalents.* — L'expression de l'arc élémentaire décrit par μ sur le plan est telle que

$$ds_\mu^2 = \left| \begin{array}{l} (r^2 - 2r\cos\alpha + 1)(dx^2 + dy^2) \\ + 2[r(\cos\alpha - r)(dx\,dx' + dy\,dy') - r\sin\alpha(dx\,dy' - dy\,dx')] \\ + r^2(dx'^2 + dy'^2) \;. \end{array} \right.$$

La correspondance précédente ne se poursuit pas en général, car les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} r^2 - 2r\cos\alpha + 1 = r'^2 - 2r'\cos\alpha' + 1 \;, \\ r(\cos\alpha - r) = r'(\cos\alpha' - r') \;, \\ r\sin\alpha = r'\sin\alpha' \;, \\ r^2 = r'^2 \;, \end{array} \right. \tag{6}$$

qui se réduisent d'ailleurs aux trois dernières, n'admettent que la seule solution

$$r = r' \;, \qquad \alpha = \alpha' + 2k\pi \;.$$

Mais si les arcs simultanément décrits par M et M' ont même longueur,

$$dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2$$

et les égalités

$$\left\{ \begin{array}{l} r(\cos\alpha - r) = r'(\cos\alpha' - r') \;, \\ r\sin\alpha = r'\sin\alpha' \;, \end{array} \right. \tag{7}$$

sont satisfaites dans les conditions du paragraphe 9.

Une autre correspondance par arcs équivalents s'obtient encore en supposant parallèles les tangentes en M et M'; ceci entraîne

$$dx\,dy' - dy\,dx' = 0$$

et supprime la troisième relation (6), donnant un système de solution

$$r = r' \;, \qquad \alpha = -\alpha' + 2k\pi \;:$$

les μ et μ' sont contraposés pour la droite MM'.

11. — *Conclusion.* — En résumé:

Si deux points M *et* M′ *décrivent deux courbes quelconques données d'un plan, il s'établit entre les points* μ *et* μ', *contraposés pour la médiatrice du segment* MM′, *une correspondance conservant l'aire; si, de plus, les arcs simultanément décrits par* M *et* M′ *ont même mesure, de même ceux que décrivent* μ *et* μ'.

12. — En supposant les courbes (C) et (C′) fermées, de même longueur et simultanément décrites par les points M et M′, la courbe qu'engendre μ se ferme et l'aire incluse a pour expression

$$\int_0^l \eta\, d\xi - \xi\, d\eta \ ,$$

l'élément différentiel étant une fonction de l'arc de (C), par exemple. Un calcul long mais fort simple transforme l'intégrale définie en

$$(r^2 - 2r \cos \alpha + 1) \int_0^l (y\,dx - x\,dy)$$

$$+ r(\cos \alpha - r) \int_0^l (y\,dx' - x\,dy' + y'\,dx - x'\,dy)$$

$$- r \sin \alpha \int_0^l (y\,dy' - y'\,dy + x\,dx' - x'\,dx)$$

$$+ r^2 \int_0^l (y'\,dx' - x'\,dy') \ .$$

L'aire est la même pour les points μ et μ' répondant précisément aux relations (5); de là une conclusion analogue à celle du paragraphe 10. Si

$$\int_0^l y\,dx - x\,dy = \int_0^l (y'\,dx' - x'\,dy') \ .$$

c'est-à-dire si les aires qu'enferment (C) et (C′) sont égales, (6) est remplacé par (7): les points μ et μ' sont contraposés pour la médiatrice du segment MM′.

Ainsi:

Si deux points M *et* M′ *décrivent simultanément deux courbes fermées d'un plan, de même longueur et bordant des surfaces équivalentes, les courbes décrites par les points* μ *et* μ', *contraposés pour la médiatrice du segment* MM′, *sont fermées et bordent des surfaces équivalentes.*

La proposition s'applique particulièrement au cas de la correspondance par arcs équivalents sur des courbes fermées de même longueur; les lieux de μ et de μ' ont, en outre, même longueur.

Juillet 1932.

SUR LA SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES PAR LES MOYENNES GÉNÉRALISÉES

PAR

Nikola Obrechkoff (Sofia, Bulgarie).

Soit $c_0, c_1, c_2, \ldots,$ des nombres donnés et supposons que les nombres

$$C_n = \sum_{\mu=0}^{n} c_\mu$$

sont différents de zéro. La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

est sommable par les moyennes généralisées si l'expression

$$\delta_n = \frac{c_0 s_0 + c_1 s_1 + \ldots + c_n s_n}{C_n}, \qquad s_n = \sum_{\mu=0}^{n} a_\mu ,$$