

SUR LA SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES PAR LES MOYENNES GÉNÉRALISÉES

Autor(en): **Obrechhoff, Nikola**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1932)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-24625>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ainsi:

Si deux points M et M' décrivent simultanément deux courbes fermées d'un plan, de même longueur et bordant des surfaces équivalentes, les courbes décrites par les points μ et μ' , contraposés pour la médiatrice du segment MM', sont fermées et bordent des surfaces équivalentes.

La proposition s'applique particulièrement au cas de la correspondance par arcs équivalents sur des courbes fermées de même longueur; les lieux de μ et de μ' ont, en outre, même longueur.

Juillet 1932.

SUR LA SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES PAR LES MOYENNES GÉNÉRALISÉES

PAR

Nikola OBRECHKOFF (Sofia, Bulgarie).

Soit c_0, c_1, c_2, \dots , des nombres donnés et supposons que les nombres

$$C_n = \sum_{\mu=0}^n c_\mu$$

sont différents de zéro. La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \tag{1}$$

est sommable par les moyennes généralisées si l'expression

$$\delta_n = \frac{c_0 s_0 + c_1 s_1 + \dots + c_n s_n}{C_n}, \quad s_n = \sum_{\mu=0}^n a_\mu,$$

tend vers une limite, lorsque $n \rightarrow \infty$. Pour que chaque série convergente soit sommable par cette méthode avec la même somme, il faut et il suffit, d'après un théorème connu de Tœplitz, que

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} |C_n| = \infty$
- 2) $|c_0| + |c_1| + \dots + |c_n| < K |C_n|$, K fini.

Il est intéressant de chercher s'il est possible d'employer cette méthode de sommation pour le prolongement analytique d'une série de Taylor. D'après la méthode de M. Borel pour le prolongement analytique il faut d'abord étudier la série

$$(2) \quad 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

Dans le cas $c_n > 0$, M. Bouligand, dans la deuxième édition du livre de M. Borel « Leçons sur les séries divergentes » (1928, p. 253-254), démontre, en se basant sur un théorème de M. Montel, que la série (2) n'est pas sommable pour aucun $|z| > 1$ si les c_n satisfont encore à quelques conditions de monotonie, en remarquant que le cas général paraît difficile à résoudre. Nous démontrons le résultat général suivant:

La série (2) n'est pas sommable par cette méthode en dehors du cercle $|z| \leq 1$.

Démonstration. En effet, nous avons

$$S_n = 1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}, \quad S_n = \frac{1}{1 - z} - \frac{z^{\tau_n}}{1 - z},$$

$$\tau_n = \frac{c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n}{C_n}.$$

Soit z un nombre fixe, $|z| > 1$. Supposons que la série (2) est sommable pour z c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = A$. Nous avons

$$c_n z^n = C_n \tau_n - C_{n-1} \tau_{n-1},$$

d'où l'on obtient

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} = \frac{z^n - \tau_{n-1}}{z^n - \tau_n} = \frac{1 - \tau_{n-1} x^n}{1 - \tau_n x^n}, \quad x = \frac{1}{z}, \quad |x| < 1,$$

$$C_n = c_0 \prod_{\rho=1}^n \frac{1 - \tau_{\rho-1} x^\rho}{1 - \tau_\rho x^\rho}$$

Comme les séries $\sum \tau_n x^n$, $\sum \tau_{n-1} x^n$ sont absolument convergentes, les produits infinis

$$\Pi (1 - \tau_n x^n) , \quad \Pi (1 - \tau_{n-1} x^n)$$

sont aussi absolument convergents et par conséquent sont différents de zéro. On en déduit que C_n tend vers une limite finie, ce qui est en contradiction avec la condition et le théorème est démontré.

SUR LES POLAIRES GÉNÉRALISÉES ET COURBES MOYENNES

PAR

André HAARBLEICHER (Paris).

M. d'OCAGNE m'a communiqué les résultats de deux Notes¹, l'une de lui, l'autre de M. HARMEGNIES sur les courbes polaires et les courbes moyennes, et m'a demandé de rechercher l'application des coordonnées isotropes à cette étude².

Je donne ci-après cette application pour la courbe moyenne relative à deux cercles quelconques.

Soit C_1 , C_2 les deux cercles, O_1 , O_2 leurs centres, O un point quelconque par lequel on mène une sécante qui coupe le cercle C_1 en des points M_1 , le cercle C_2 en des points M_2 . Lieu du milieu M des segments de droite $M_1 M_2$ lorsque la sécante tourne autour du point O .

Prenons pour axes de coordonnées les droites isotropes passant par O . Soit

$$XY - b_1 X - a_1 Y + c_1 = 0$$

$$XY - b_2 X - a_2 Y + c_2 = 0$$

$$Y - m X = 0$$

¹ Voir *L'Ens. Math.*, t. XXXI, p. 31-49, 50-57.

² Voir: *De l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonnées*, par A. HAARBLEICHER (Paris, Gauthier-Villars, 1931). [N. d. l. R.]