SUR L'ÉQUATION DE LA SURFACE DU 2me ORDRE DÉTERMINÉE PAR TROIS DROITES

Autor(en): **Loria, Gino**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **31 (1932)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-24627

SUR L'ÉQUATION DE LA SURFACE DU 2^me ORDRE DÉTERMINÉE PAR TROIS DROITES

(Extrait d'une lettre adressée à un élève.)

PAR

Gino LORIA (Gênes, Italie).

Vous avez parfaitement raison; tandis que dans tout cours de géométrie on prouve que trois droites quelconques déterminent une surface du 2^me ordre, généralement les traités de géométrie analytique ne donnent pas l'équation de cette surface. Cette question est mentionnée dans le mémoire de CAYLEY *On the six Coordinates of a Line* (Cambridge Trans. T. XI, Part II, ou Mathem. Papers, T. VII, pp. 66 et suiv.); mais c'est étrange que le grand géomètre dise que « the direct investigation is some-what tedious » et se borne à donner le résultat sans démonstration (l. c. pp. 86-87). SALMON (*Geometry of three dimensions*, VI ed. by R. A. P. ROGERS, Vol. I, London 1914, p. 107) donne la formule de CAYLEY, aussi sans démonstration. Toutefois la question ne présente aucune difficulté.

Soient en effet a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} (ik = 01, 23, 02, 31, 03, 12) les coordonnées plückeriennes des droites données a, b, c; p_{ik} celles d'une génératrice quelconque de la surface considérée. On aura la relation

$$a_{23}\,p_{01} + a_{31}\,p_{02} + a_{12}\,p_{03} + a_{01}\,p_{23} + a_{02}\,p_{31} + a_{03}\,p_{12} = 0 \qquad (1)$$

et les deux analogues en b, c.

D'ailleurs si x_0, x_1, x_2, x_3 sont les coordonnées d'un point quelconque de la droite p on peut écrire les équations suivantes

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 p_{23} + x_2 p_{31} + x_3 p_{12} = 0 \\ x_0 p_{23} - x_2 p_{03} + x_3 p_{02} = 0 \\ - x_0 p_{31} - x_1 p_{03} + x_3 p_{01} = 0 \\ x_0 p_{12} - x_1 p_{02} + x_2 p_{01} = 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

dont deux seulement sont nécessaires pour que le point x tombe sur la droite p. Or, entre les équations (1) et trois des équations (2) on peut éliminer les six coordonnées p_{ik}; en choisissant les trois premières on trouve:

$$\begin{vmatrix} a_{23} & a_{31} & a_{12} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ b_{23} & b_{31} & b_{12} & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ c_{23} & c_{31} & c_{12} & c_{01} & c_{02} & c_{03} \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_3 & -x_2 & x_0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & -x_1 & 0 & -x_0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

Cette équation a comme facteur étranger x_3; pour s'en assurer il est suffisant de développer le déterminant par le théorème de Laplace en choisissant les trois premières et les trois dernières lignes. Alors si on désigne par les nombres 1, 2, 3, 1′, 2′, 3′, les lignes successives de la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_{23} & a_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{03} \\ b_{23} & b_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{03} \\ c_{23} & c_{31} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{03} \end{Vmatrix},$$

le facteur x_3 supprimé, on arrive au résultat suivant.

$$\begin{array}{l} x_0^2(123) + x_1^2(12'3') + x_2^2(1'23') + x_3^2(1'2'3) \\ - x_0 x_1\{(122') + (133')\} - x_2 x_3\{(1'22') - (1'33')\} \\ - x_0 x_2\{(233') + (211')\} - x_3 x_1\{(2'33') - (2'11')\} \\ - x_0 x_3\{(311') + (322')\} - x_1 x_2\{(3'11') - (3'22')\} = 0 \end{array} \tag{4}$$

les parenthèses représentant des déterminants du troisième ordre. Cette formule concorde avec l'énoncé de Cayley[1].

Or l'équation (4) est, comme il devait être, parfaitement symétrique par rapport aux quatre coordonnées $x_0 \dots x_3$; mais la marche que nous avons suivie ne l'est pas, car nous avons employé trois des quatre équations (2). Je me suis, en conséquence demandé: n'est-il pas possible de se servir d'un raisonnement dans lequel les droites données soient traitées toutes de la même manière et qui mène directement a une formule symétrique et dépourvue de facteurs étrangers ?

Un peu de réflexion m'a conduit à la méthode suivante:

Soit P un point quelconque de l'espace; proposons nous de construire son polaire[2] par rapport à la surface déterminée par les droites a, b, c. A cet effet menons par P la droite qui coupe les deux b, c et appellons L le conjugué harmonique de P par rapport aux deux points de rencontre; M et N ayant des significations analogues par rapport aux couples c, a et a, b; L, M, N déterminent le polaire π cherché; si ce plan passe par P, ce point appartiendra à la surface dont nous nous occupons. En traduisant en formules ce raisonnement on arrive au but cherché; je vais entrer dans quelques détails sur ce calcul, car il offre une singularité à laquelle on ne s'attendait pas.

Remarquons que le point L correspond au point P dans le « gescharrte Involution » déterminée par les droites b, c; si donc, $x_0\ x_1\ x_2\ x_3$ sont les coordonnées de P, celles de L seront des formes linéaires de ces quantités, c'est-à-dire elles auront la forme suivante

$$\alpha_x^{(0)}\ ,\quad \alpha_x^{(1)}\ ,\quad \alpha_x^{(2)}\ ,\quad \alpha_x^{(3)}\ .$$

D'une manière analogue celles des points M, N seront

$$\beta_x^{(0)}\ ,\quad \beta_x^{(1)}\ ,\quad \beta_x^{(2)}\ ,\quad \beta_x^{(3)}$$

$$\gamma_x^{(0)}\ ,\quad \gamma_x^{(1)}\ ,\quad \gamma_x^{(2)}\ ,\quad \gamma_x^{(3)}\ .$$

---

[1] Cette équation sert aussi à représenter la surface intersection de trois complexes du 1^er degré. En l'appliquant on peut trouver les équations des « quadriques de Lie » en suivant la voie que j'ai indiquée dans mon mémoire *Applicazioni geometriche di una formola di Siacci* (Boll. dell' Unione matem. ital., Anno II, 1928).

[2] J'écris *le polaire* au lieu de *le plan polaire* à l'instar de ce qu'on écrit *la polaire* et non *la droite polaire*. Je pense aussi qu'il serait bon de supprimer le mot *plan* dans tous les cas analogues, en écrivant *le tangent* (d'une surface) ou *le normal* et *l'osculateur* (d'une courbe), comme tout le monde écrit *la tangente* et *la normale* d'une courbe plane.

Cela prouve que lorsque les points L, M, N, P tomberont dans le même plan (c'est-à-dire lorsque P sera un point de la surface cherchée) et seulement alors on aura

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_x^{(0)} & \alpha_x^{(1)} & \alpha_x^{(2)} & \alpha_x^{(3)} \\ \beta_x^{(0)} & \beta_x^{(1)} & \beta_x^{(2)} & \beta_x^{(3)} \\ \gamma_x^{(0)} & \gamma_x^{(1)} & \gamma_x^{(2)} & \gamma_x^{(3)} \end{vmatrix} = 0 . \tag{5}$$

Cette équation devrait représenter la surface dont nous parlons; mais malheureusement elle est du 4^{me} au lieu du 2^{me} degré. Je vais prouver qu'elle est le carré de l'équation cherchée.

Pour simplifier les calculs je me servirai de coordonnées cartésiennes en prenant pour origine le centre du parallèlépipède dont les droites données sont trois arêtes gauches et comme axes des parallèles à ces droites. Alors les dites droites peuvent être représentées par les couples suivants d'équation:

$$\begin{cases} y = b \\ z = -c \end{cases} \qquad \begin{cases} z = c \\ x = -a \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a \\ y = -b \end{cases} ;$$

dans ces hypothèses il est facile de déterminer les coordonnées des points L, M, N; celles de L sont

$$\frac{a^2}{x} , \qquad -\frac{ay + bx + ab}{x} , \qquad \frac{az + cx - ac}{x}$$

tandis que celles de M, N ont des expressions qui s'en tirent à l'aide de permutations circulaires. De manière que l'équation (5) prend dans ce cas la forme suivante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a^2 & -(ay + bx + ab) & (az + cx - ac) & x \\ (bx + ay - ab) & b^2 & -(bz + cy + bc) & y \\ -(cx + az + ca) & (cy + bz - bc) & c^2 & z \end{vmatrix} = 0 . \tag{6}$$

Comme ce déterminant n'appartient à aucune classe connue, je vais vous dire comme on peut le calculer. Posons à cet effet

$$\alpha = bz + cy\,, \qquad \beta = cx + az\,, \qquad \gamma = ay + bx$$

alors l'équation précédente pourra s'écrire

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 0 \\ a^2 & -(\gamma + ab) & \beta - ac & x \\ \gamma - ab & b^2 & -(\alpha + bc) & y \\ -(\beta + ac) & \alpha - bc & c^2 & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2 & -\gamma\, ab & \beta - ac \\ \gamma - ab & b^2 & -\alpha - bc \\ -\beta - ac & -\alpha - bc & c^2 \end{vmatrix} = 0\,. \tag{6'}$$

Pour calculer le premier, Δ_1, de ces déterminants appelons A_{ik} les déterminants du 2^{me} ordre qu'on peut tirer de son noyau; on trouve

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \alpha^2\,, & A_{23} &= \beta\gamma + 2abcx + 2a^2bc\,, & A_{32} &= \beta\gamma - 2abcx + 2a^2bc \\
A_{22} &= \beta^2\,, & A_{31} &= \gamma\alpha + 2abcy + 2ab^2c\,, & A_{13} &= \gamma\alpha - 2abcy + 2ab^2c \\
A_{33} &= \gamma^2\,, & A_{12} &= \alpha\beta + 2abcz + 2abc^2\,, & A_{21} &= \alpha\beta - 2abcz + 2abc^2\,;
\end{aligned}$$

en conséquence.

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= x(xA_{11} + yA_{21} + 2A_{31}) + y(xA_{12} + yA_{22} + zA_{32}) + z(xA_{13} + yA_{23} + zA_{33}) \\
&= A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + xy(A_{12} + A_{21}) + x^2(A_{13} + A_{31}) + yz(A_{23} + A_{32}) \\
&= \alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + \gamma^2z^2 + xy(2\alpha\beta + 4abc^2) + xz(2\alpha\gamma + 4ab^2c) + yz(2\alpha\beta + 4abc^2) \\
&= (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + 4abc(ayz + bzx + cxy) \\
&= 4(ayz + bzx + cxy)^2 + 4abc(ayz + bzx + cxy)\,.
\end{aligned}$$

Quant au second, Δ_2, déterminant qui entre dans la formule (6), on peut le décomposer dans les huit suivants:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha^2 & -\gamma & \beta \\ -ab & 0 & -\alpha \\ -ac & \alpha & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -ab & \beta \\ \gamma & b^2 & -\alpha \\ -\beta & -bc & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & -\gamma & -ac \\ \gamma & 0 & -bc \\ -\beta & \alpha & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -ab & -ac \\ \gamma & b^2 & -bc \\ -\beta & -bc & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & -\gamma & -ac \\ -ab & 0 & -bc \\ -ac & \alpha & c^2 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a^2 & -ab & \beta \\ -ab & b^2 & -\alpha \\ -ac & -bc & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a^2 & -ab & -ac \\ -ab & b^2 & -bc \\ -ac & -bc & c^2 \end{vmatrix}\,;$$

le premier est nul et les autres donnent comme somme

$$-2abc(\alpha x + \beta y + \gamma z) - 4a^2b^2c^2$$

ou bien

$$-4abc(ayz + bzx + cxy) - 4a^2b^2c^2 .$$

Substituant les valeurs trouvées de Δ_1 et Δ_2 dans l'équation (6') on a

$$4(ayz + bzx + cxy)^2 + 8abc(ayz + bzx + cxy) + 4a^2b^2c^2 = 0 .$$

c'est-à-dire

$$4(ayz + bzx + cxy + abc)^2 = 0 .$$

L'équation de la surface du 2me ordre considérée est donc

$$ayz + bzx + cxy + abc = 0 .$$

. . . .

Gênes, 2 novembre 1932.

LE 9e CONGRÊS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS

Zurich, 4-12 septembre 1932.

PAR

H. FEHR.

Le premier Congrès international des mathématiciens a eu lieu à Zurich, du 9 au 11 août 1897, sous la présidence de M. le Prof. C. GEISER. A trente-cinq ans d'intervalle, les mathématiciens venus du monde entier se sont de nouveau rencontrés à Zurich. Au nombre des participants, plus d'une vingtaine avaient déjà pris part au premier Congrès, quelques-uns parmi les plus fidèles ont même suivi les neuf congrès internationaux de mathématiciens [1].

Dans sa séance de clôture du 10 septembre 1928, le Congrès de Bologne avait émis le vœu que le prochain congrès ait lieu à Zurich.

[1] Les congrès se sont succédés comme suit: I. Zurich, 1897; II. Paris, 1900; III. Heidelberg, 1904; IV. Rome, 1908; V. Cambridge, 1912. Puis deux congrès à participation plus restreinte: VI. Strasbourg, 1920, et VII. Toronto, 1924. Enfin VIII. Bologne, 1928, et IX. Zurich, 1932.