Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1936)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA TOPOLOGIE DES ESPACES REPRÉSENTATIFS DES GROUPES DE LIE

Kapitel: III. — Les groupes clos.

Autor: Cartan, Elie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27310

alors un groupe de recouvrement de Γ. Si G est clos, Γ l'est aussi, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Rappelons enfin qu'à la transformation infinitésimale X_i de G correspond dans Γ la transformation infinitésimale

$$E_i \equiv c_{ki}^h e^k \frac{\partial f}{\partial e^h} . \qquad (5)$$

III. — Les groupes clos.

Dans l'étude topologique des groupes de Lie, les groupes clos jouent un rôle essentiel et c'est par eux que nous allons commencer. On a facilement des renseignements importants sur leur structure. En effet le groupe adjoint Γ d'un groupe clos G est également clos; d'après un théorème de M. H. Weyl [**4**], il laisse invariante au moins une forme quadratique définie positive, qu'on peut supposer ramenée à $(e^1)^2 + (e^2)^2 + \ldots + (e^r)^2$, de sorte que Γ est un groupe orthogonal. De là on déduit que les constantes de structure c_{ij}^k, antisymétriques par rapport à leurs deux premiers et par rapport à leurs deux derniers indices, ne changent pas par une permutation circulaire et changent de signe par une permutation impaire de leurs indices.

Si nous regardons les e^i comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace à r dimensions, Γ est un groupe de rotations ou de symétries autour de l'origine O. Par suite s'il laisse invariante une variété linéaire à p dimensions passant par O, il laissera invariante la variété à $r - p$ dimensions totalement perpendiculaire à la première. Du reste dire qu'une variété linéaire est invariante par Γ, c'est dire que les transformations infinitésimales $e^i X_i$ dont les points-images $(e^1, \ldots, e^r)$ sont dans la variété engendrent un *sous-groupe invariant* de G. Par un choix convenable des axes, c'est-à-dire de la base infinitésimale de G, on arrive, en utilisant les remarques précédentes, à partager les r variables e^i en h séries de p_1, p_2, ..., p_h variables, ou encore les r transformations infinitésimales de base en h séries correspondantes, de manière

1° *que les transformations d'une même série engendrent un sous-groupe invariant de* G;

2° *que ces sous-groupes soient échangeables entre eux;*

3° *qu'aucun d'eux n'admette un sous-groupe invariant d'ordre plus petit.*

Si l'une des séries ne contient qu'un élément, il lui correspond un sous-groupe invariant abélien clos. Si l'une des séries contient plusieurs éléments, il lui correspond un sous-groupe invariant *simple*, c'est-à-dire n'admettant aucun sous-groupe invariant continu. Nous arrivons ainsi à la conclusion suivante [**14, 16**]:

Tout groupe clos est abélien ou infinitésimalement isomorphe au produit direct d'un ou plusieurs groupes simples et éventuellement d'un groupe abélien. Cela veut dire, dans le second cas, que le produit direct en question est un groupe de recouvrement du groupe donné.

IV. — Les groupes simples clos.

Nous sommes ainsi conduits naturellement à l'étude des groupes simples clos. Le groupe adjoint Γ d'un tel groupe G ne peut laisser invariante qu'une seule forme quadratique définie (à un facteur constant près), sans quoi il laisserait invariante au moins une variété linéaire réelle, qui correspondrait à un sous-groupe invariant continu. Il en résulte que *la forme quadratique* φ(e) *d'un groupe simple clos est définie*; on voit du reste facilement qu'elle est négative. La réciproque est fondamentale: *tout groupe dont la forme* φ (e) *est définie est clos.*

Remarquons en passant ce fait qu'une propriété du groupe infinitésimal entraîne ici une propriété topologique du groupe global. Il n'en est pas toujours ainsi; deux groupes abéliens de même ordre, caractérisés par les mêmes constantes de structure, toutes nulles, peuvent être l'un clos, l'autre ouvert.

Il nous faut ici rappeler, avant de donner la démonstration, un théorème classique [**2**] d'après lequel tout groupe dont la forme $\varphi(e)$ est de discriminant non nul est *semi-simple*, c'est-à-dire est simple ou est infinitésimalement le produit direct de plusieurs groupes simples. Il suffit donc de démontrer la réciproque énoncée pour les groupes simples.

La démonstration se fait en deux temps: on démontre d'abord