5. — Cercles bitangents, cercles focaux.

Pour $k \neq 1$, on a, d'après (11),

$$\frac{\overline{\mathrm{M}n}}{\overline{\mathrm{M}\Omega}} = \frac{\overline{\mathrm{H}\omega}}{\overline{\mathrm{H}\Omega}} = 1 + \frac{\overline{\Omega\omega}}{\overline{\mathrm{H}\Omega}} = 1 - k\ ;$$

donc, *les deux axes* Ox, Oy *d'une courbe* $\mathcal{C}$ *à centre déterminent sur toute normale à cette courbe deux segments* $\overline{\mathrm{M}n}$, $\overline{\mathrm{M}\Omega}$ *dont le rapport est constant et égal à* 1 — k.

5. — Cercles bitangents, cercles focaux.

Soit $k \neq 1$; à toute parallèle D à ωx, coupant d en H, nous associons un cercle Γ grâce à la relation (10), toutes les fois du moins que cette relation donne un lieu ou un point. Ce cercle Γ, qui peut donc être un cercle point [1], est appelé un *cercle focal*, dont D est dite la *droite directrice*. Dans les cas où D et Γ se coupent, Γ est un cercle *bitangent* à $\mathcal{C}$.

Soit M_1 un point quelconque, comme (11) et (12) donnent:

$$\frac{\overline{\Omega \mathrm{H}}}{1} = \frac{\overline{\mathrm{H}\omega}}{k-1} = \frac{\overline{\omega\Omega}}{-k}\ ,$$

la relation (3) appliquée aux trois cercles γ, Γ, H d'un même faisceau s'écrit:

$$\mathcal{P}(\mathrm{M}_1, \gamma) + (k-1) \cdot \mathcal{P}(\mathrm{M}_1, \Gamma) - k\mathcal{P}(\mathrm{M}_1, \mathrm{H}) = 0\ ,$$

ou, exprimant $\mathcal{P}(\mathrm{M}_1, \mathrm{H})$ à l'aide de $\mathrm{M}_1 d$ et $\mathrm{M}_1\mathrm{D}$,

$$\left[\mathcal{P}(\mathrm{M}_1, \gamma) - k\overline{\mathrm{M}_1 d}^2\right] + (k-1)\left[\mathcal{P}(\mathrm{M}_1, \Gamma) - \frac{k}{k-1}\overline{\mathrm{M}_1\mathrm{D}}^2\right] = 0\ .$$

Donc, *la courbe* $\mathcal{C}$ *est susceptible d'être définie à partir de chaque couple* Γ, D *par la relation:*

$$\mathcal{P}(\mathrm{M}_1, \Gamma) = \mathrm{K}\overline{\mathrm{M}_1\mathrm{D}}^2\ ,$$

dans laquelle on a posé:

$$\mathrm{K} = \frac{k}{k-1}\ , \qquad \textit{ou} \qquad \frac{1}{\mathrm{K}} + \frac{1}{k} = 1\ .$$

---

1 On pourrait même sans grande difficulté parler ici de cercles imaginaires à centres réels.

Le passage d'un cercle Γ de centre Ω et d'une droite D de pied H à un cercle Γ_1 de centre Ω_1 et à une droite D_1 de pied H_1 est immédiat, que ce soit Ω_1 ou H_1 qui soit donné. En effet, ΩH et $\Omega_1 H_1$ passant par ω, on a:

$$\frac{\overline{\Omega\Omega_1}}{\overline{HH_1}} = \frac{\overline{\Omega\omega}}{\overline{H\omega}} = \frac{k}{k-1} = K \ ;$$

d'autre part, l'axe radical Δ de Γ et Γ_1 est parallèle à ωx et passe par le point de rencontre des axes radicaux de Γ avec γ et de Γ_1 avec γ. Mais ceux-ci sont aussi les axes radicaux de γ avec H et de γ avec H_1, donc Δ est l'axe radical de H avec H_1, c'est-à-dire la médiatrice de HH_1.

Faisons jouer maintenant à Γ, D, K les rôles que jouaient tout d'abord γ, d, k et cherchons l'intersection de $\mathcal{C}$ et de d. Il nous faudra construire la circonférence définie par

$$\mathcal{P}(M, \Gamma) = K\,\overline{MH}^2 \ . \tag{10'}$$

Or, comme l'on a, d'après (3),

$$\overline{\Omega H}\,\mathcal{P}(M, \gamma) + \overline{H\omega}\,\mathcal{P}(M, \Gamma) + \overline{\omega\Omega}\,\overline{MH}^2 = 0 \ ,$$

ou

$$\overline{\Omega H}\,\mathcal{P}(M, \gamma) + \overline{H\omega}\left[\mathcal{P}(M, \Gamma) - K\overline{MH}^2\right] = 0 \ ,$$

la circonférence à construire est donc γ.

Ainsi le procédé qui, de d, γ, k, nous a permis de passer à D, Γ, K, permet aussi de revenir des circonférences Γ à une famille de circonférences centrées sur Ox et dont γ fait partie.

En résumé: *toute courbe $\mathcal{C}$ à centre est susceptible d'une double infinité de définitions comme lieu des points dont le quotient de la puissance par rapport à un cercle focal par le carré de la distance à une droite directrice est constant. Les centres des cercles focaux sont sur les deux axes de $\mathcal{C}$ auxquels les droites directrices sont respectivement perpendiculaires. A tous les cercles ayant leurs centres sur Ox correspond la même constante* k, *à tous ceux ayant leurs centres sur Oy correspond la même constante* K; *on a*

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{K} = 1 \ . \tag{13}$$

On passe d'un cercle focal, soit γ de centre ω sur Ox, *à un cercle γ_1 de la même série en remarquant qu'au déplacement* $\overline{\omega\omega_1}$ *du centre correspond le déplacement* $\overline{\mathrm{dd}_1}$ *de la droite directrice, tel que*

$$k\,\overline{dd_1} = \overline{\omega\omega_1} \tag{14}$$

et que l'axe radical de γ et γ_1 est la droite équidistante de d *et de* d_1.

On passe aux cercles focaux de l'autre série en considérant les cercles définis par

$$\mathcal{P}(\mathrm{M}, \gamma) = k\,\overline{\mathrm{MH}}^2 \; ; \tag{10}$$

H *étant un point quelconque de la droite directrice* d *du cercle γ.*

6. — Nature des courbes $\mathcal{C}$, lorsque k est différent de 1.

Il sera démontré que $\mathcal{C}$ est une conique à centre si nous trouvons un cercle focal de rayon nul.

Γ sera de rayon nul, si cette circonférence est réduite à son centre, c'est-à-dire est le second cercle point du faisceau γ, H; donc si l'on a :

$$\overline{\omega\Omega} \cdot \overline{\omega \mathrm{H}} = r^2 \, .$$

Ainsi, Ω devra être à la rencontre de Oy et du cercle δ inverse de d, γ étant le cercle d'inversion. Si δ coupe Oy, leurs points de rencontre sont des centres de cercles Γ de rayon nul; $\mathcal{C}$ est une conique d'axe focal Oy.

Or δ a pour diamètre

$$\frac{r^2}{\overline{\omega d}} \, ,$$

et, d'après (12),

$$\overline{\omega \mathrm{O}} = \mathrm{K}\,\overline{\omega d} \, ,$$

donc $\mathcal{C}$ *est une conique d'axe focal* Oy *si l'on a :*

$$\mathrm{K} > 0 \, , \qquad r^2 > \mathrm{K}\,\overline{\omega d}^2 \; ; \tag{15}$$

$\mathcal{C}$ *est une conique d'axe focal* Ox *si l'on a :*

$$k > 0 \, , \qquad \mathrm{R}^2 > k\,\overline{\Omega \mathrm{D}}^2 \, . \tag{16}$$