

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CHARLES STURM ET SON ŒUVRE MATHÉMATIQUE¹ (1803-1855)
Kapitel: V. — Suite des travaux sur la théorie des équations.
Autor: Loria, Gino
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28595>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

qu'on rencontre pour la première fois les expressions suivantes des fonctions de Sturm relatives à une équation $V = 0$ ayant pour racines les nombres réels a, b, \dots, h :

$$V_1 = \Sigma (x - b) (x - c) \dots (x - h)$$

$$V_2 = \frac{1}{m^2} \Sigma (a - b)^2 (x - c) \dots (x - h)$$

$$V_3 = \frac{1}{\lambda_3} \Sigma (a - b)^2 (a - c)^2 (b - c)^2 (x - d) (x - e) \dots (x - h)$$

$$V_4 = \frac{1}{\lambda_4} \Sigma (a - b)^2 (a - c)^2 (a - d)^2 (b - c)^2 (b - d)^2 (c - d)^2 (x - e) \dots (x - h)$$

.....

$$V_m = \frac{1}{\lambda_m} (a - b)^2 (a - c)^2 \dots (a - h)^2 (b - c)^2 \dots (g - h)^2$$

les λ étant des coefficients dont l'auteur anglais ne donne pas les expressions générales. Ces expressions ont été découvertes par Sturm lui-même dans un remarquable mémoire [35] où les formules de Sylvester sont établies et complétées par la détermination des constantes λ ; il est bon d'ajouter que Liouville montra tout de suite (*Journ. de math. pures et appl.*, t. VII, p. 528) qu'on peut arriver au même résultat à l'aide d'une formule donnée par Cauchy dans son *Cours d'Analyse algébrique* ¹.

V. — SUITE DES TRAVAUX SUR LA THÉORIE DES ÉQUATIONS.

11. — A la même période de l'activité de Sturm appartiennent deux mémoires présentés à l'Académie des Sciences, mais dont on ne connaît que les courts résumés publiés dans le *Bulletin de Ferussac*. Dans l'une [20], il applique un procédé, dont s'est servi Fourier dans ses recherches sur les équations numériques, pour déterminer les valeurs réelles et positives de x satisfaisant à une équation de la forme

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \dots + Mx^\mu = 0$$

où les coefficients A, B, C, \dots, M sont des nombres donnés et les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ sont des nombres réels quelconques,

¹ Pour une bibliographie assez riche relative au théorème de Sturm, nous renvoyons nos lecteurs à un article de M. Lecat dans le t. II (2^me sér.), 1923, de *L'Intermédiaire des mathématiciens*.

rationnels ou irrationnels. Ces équations se rencontrent dans certaines questions de Physique mathématique. La même chose peut se répéter par rapport aux équations étudiées par notre géomètre dans l'autre des mémoires cités [21]. Dans ce travail l'auteur démontre avant tout, de deux manières originales, la réalité des racines de certaines équations transcendantes; ensuite il détermine les coefficients constants des séries qui représentent une fonction arbitraire entre des limites données. Malheureusement dans les papiers qu'il a laissés, on n'a pas trouvé le texte complet de ces mémoires, ni même quelques lignes capables de combler cette lacune (et ce n'est pas la seule) que présente le tableau de sa production scientifique.

12. — Si au lieu d'une fonction algébrique on égale à zéro une fonction quelconque d'une variable complexe, l'analogie avec la question résolue par le théorème de Sturm fait naître le problème de déterminer combien de zéros de l'équation résultante tombent dans une portion déterminée du plan. C'est Cauchy qui l'a résolue par le théorème général suivant: « Soit $f(z) = P + iQ$ une fonction de la variable $z = x + iy$, P et Q étant des fonctions réelles des x et y . Traçons dans le plan des axes rectangulaires un contour quelconque qui ne passe par aucun des points-racines de l'équation $f(z) = 0$, auquel cas le rapport P/Q aura en chaque point du contour une valeur déterminée. Si l'on suit le contour considéré en partant d'un quelconque de ses points et en marchant toujours dans le même sens jusqu'à ce qu'on revienne au point de départ, le rapport P/Q prendra diverses valeurs et il passera par zéro chaque fois que P sera nul, tandis qu'il deviendra infini lorsque Q s'annulera. Cela posé, soit k le nombre des fois que ce rapport, en s'évanouissant et en changeant de signe, passe du positif au négatif et k' le nombre de fois que le même rapport s'évanouissant et changeant de signe passe du négatif au positif; le nombre k ne sera jamais inférieur à k' et l'excès $\Delta = k - k'$ sera toujours égal au double du nombre des racines de l'équation $f(z) = 0$ comprises dans la partie du plan limitée par le contour considéré ». Comme la démonstration donnée par Cauchy de ce beau théorème est basée sur l'emploi des intégrales définies et du calcul des résidus, il était bien

naturel d'essayer de l'établir par des raisonnements élémentaires : c'est ce que se proposèrent de faire les deux amis Sturm et Liouville et ils arrivèrent au but [25] d'une manière tellement satisfaisante que la démonstration proposée ne tarda pas à prendre place dans un célèbre ouvrage destiné à l'enseignement ¹.

Le raisonnement conçu par les deux illustres géomètres ne suppose pas la connaissance du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques; même, cette proposition apparaît comme conséquence du théorème de Cauchy. Mais si on le suppose connu, ce théorème peut s'établir à l'aide d'un nouveau raisonnement que Sturm a exposé dans un autre mémoire [26]. Ajoutons que, dans la dernière section de ce travail, l'auteur est revenu sur la supposition de ne pas se servir du théorème fondamental cité et, il a montré qu'on peut arriver à celui de Cauchy par une voie qui a l'avantage de pouvoir s'appliquer aux équations transcendantes et même sans supposer qu'on raisonne sur une équation à coefficients réels. C'est notre devoir d'ajouter que, dans les dernières pages de cet important travail, l'auteur s'arrêta à exposer des détails de calcul relatifs à la détermination du nombre Δ lorsque l'équation considérée est algébrique, ce qui est le cas intéressant en général.

13. — Sturm et Liouville étaient encore occupés par la rédaction des travaux que nous venons d'examiner lorsque Cauchy publia dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 8 mai 1837 ²), une note contenant des extraits de deux lettres, la première datée de Turin, 15 juin 1833, la seconde de Göritz, 22 avril 1837, destinées à faire connaître un théorème relatif au nombre des racines, qui tombent dans un domaine déterminé du plan, d'un système de deux équations à deux inconnues, théorème que le grand géomètre avait d'abord tiré de la notion d'« index intégral », mais qu'il établit aussi par d'autres considérations. Ce travail attira tout de suite l'attention des deux amis, qui dans la séance du 15 mai 1837 [28] donnèrent avant tout au nouveau théorème de Cauchy la forme suivante :

¹ J. A. SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure* (IV^e éd., Paris, 1877), p. 118 et suiv.

² *Comptes rendus*, t. IV, p. 674-77, ou bien *Œuvres complètes de Cauchy*, t. IV (Paris, 1884), p. 45-8.

Désignons par P et Q deux fonctions entières et par R la quantité $\frac{dP}{dx} \frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dy} \frac{dQ}{dx}$; on peut regarder x et y comme représentant les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque M du plan; traçons sur le plan des xy un contour fermé quelconque ABC ; pour chaque point de ce concours la fraction P/RQ aura en général un signe déterminé. Désignons par Δ l'excès du nombre des fois où la fraction P/RQ en s'évanouissant passe du positif au négatif sur le nombre des fois où elle passe du négatif au positif, lorsqu'on parcourt d'un mouvement continu le contour en allant des x positifs aux y positifs. Désignons en même temps par μ le nombre des solutions réelles des équations $P = 0$, $Q = 0$ qui sont contenues dans l'intérieur du contour ABC ; suivant Cauchy on a toujours $\mu = \frac{1}{2} \Delta$. Or, à l'aide de trois exemples, Sturm et Liouville prouvèrent que ce théorème *ne subsiste pas en général* et ils proposèrent de lui substituer le suivant: « Aux hypothèses exposées ajoutons celle que, sur le contour ABC , P et Q ne s'annulent pas à la fois et que dans l'intérieur de ce contour les valeurs de x , y qui annulent P et Q donnent pour R une valeur différente de zéro. Parmi les solutions des équations $P = 0$, $Q = 0$, contenues dans ce contour les unes peuvent correspondre à une valeur positive, les autres à une négative de R ; désignons par μ_1 le nombre des solutions de la première espèce et par μ_2 le nombre des solutions de la seconde espèce: on aura $\Delta = 2(\mu_1 - \mu_2)$, Δ représentant l'excès du nombre des fois où la fraction P/Q passe du positif au négatif sur le nombre des fois où elle passe du négatif au positif quand on parcourt le contour ABC de la manière indiquée ». Suivant les auteurs cités ce nouveau théorème s'établit aisément à l'aide des mêmes principes qu'ils employèrent dans leur mémoire [25] sur le théorème de Cauchy.

Le célèbre géomètre (qui se trouvait alors hors de Paris), dès qu'il connut ces remarques, s'empressa de les examiner avec la plus admirable objectivité; comme résultat de cet examen nous avons une note présentée à l'Académie des Sciences dans la séance du 3 juillet 1837¹, dans laquelle il reconnaît franchement

¹ *Comptes rendus*, t. VI, p. 6-8, ou bien *Œuvres complètes de Cauchy*, t. IV, p. 81-83.

que ses jeunes critiques avaient parfaitement raison; il ajouta de précieux renseignements sur le développement de ses idées relatives à la distribution dans le plan complexe des racines d'une équation algébrique; et, de la sorte, il fit monter sa note bien au-dessus d'une pièce douée seulement d'un but polémique.

VI. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

14. — Une autre branche des mathématiques pures dans laquelle Sturm se présente aux yeux de l'historien comme un véritable législateur est la théorie des équations différentielles. Le mémoire qui lui donne droit à cette place a été présenté à l'Académie des Sciences le 28 septembre 1833, mais il n'a été publié que trois ans après [24]. Dans ce travail sont étudiées les équations de la forme

$$L \frac{d^2 V}{dx^2} + M \frac{dV}{dx} + NV = 0$$

où L , M , N sont des fonctions données de la variable x et V la fonction inconnue; c'est à l'intégration de cette équation que se ramène la résolution d'un grand nombre de problèmes de la Physique mathématique; cette intégration est impossible en général; mais on peut (et voilà l'idée originale de Sturm!) déterminer également les propriétés essentielles de l'intégrale V . Si cette idée, qui apparaît aujourd'hui bien naturelle, ne s'est pas présentée auparavant c'est à cause du préjugé, qui commença à paraître au cours du XVIII^e siècle, que toute question d'analyse devait et pouvait être résolue par une des fonctions connues (polynômes, exponentielles, logarithmes, fonctions circulaires directes et inverses); le mérite de Sturm consiste à avoir montré comment on pouvait arriver à caractériser la fonction intégrale sans supposer d'avance la classe à laquelle elle appartient. Pour arriver à son but il écrivit l'équation donnée sous la forme

$$(I) \frac{d}{dx} \left(K \frac{dV}{dx} \right) + GV = 0.$$

où K et G sont des nouvelles fonctions de x , chose qui est toujours possible à l'aide d'une quadrature, sans toutefois