

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1938)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CHARLES STURM ET SON ŒUVRE MATHÉMATIQUE<sup>1</sup> (1803-1855)  
**Kapitel:** VI. — Équations différentielles.  
**Autor:** Loria, Gino  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28595>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 07.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

que ses jeunes critiques avaient parfaitement raison; il ajouta de précieux renseignements sur le développement de ses idées relatives à la distribution dans le plan complexe des racines d'une équation algébrique; et, de la sorte, il fit monter sa note bien au-dessus d'une pièce douée seulement d'un but polémique.

## VI. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

14. — Une autre branche des mathématiques pures dans laquelle Sturm se présente aux yeux de l'historien comme un véritable législateur est la théorie des équations différentielles. Le mémoire qui lui donne droit à cette place a été présenté à l'Académie des Sciences le 28 septembre 1833, mais il n'a été publié que trois ans après [24]. Dans ce travail sont étudiées les équations de la forme

$$L \frac{d^2 V}{dx^2} + M \frac{dV}{dx} + NV = 0$$

où  $L$ ,  $M$ ,  $N$  sont des fonctions données de la variable  $x$  et  $V$  la fonction inconnue; c'est à l'intégration de cette équation que se ramène la résolution d'un grand nombre de problèmes de la Physique mathématique; cette intégration est impossible en général; mais on peut (et voilà l'idée originale de Sturm!) déterminer également les propriétés essentielles de l'intégrale  $V$ . Si cette idée, qui apparaît aujourd'hui bien naturelle, ne s'est pas présentée auparavant c'est à cause du préjugé, qui commença à paraître au cours du XVIII<sup>e</sup> siècle, que toute question d'analyse devait et pouvait être résolue par une des fonctions connues (polynômes, exponentielles, logarithmes, fonctions circulaires directes et inverses); le mérite de Sturm consiste à avoir montré comment on pouvait arriver à caractériser la fonction intégrale sans supposer d'avance la classe à laquelle elle appartient. Pour arriver à son but il écrivit l'équation donnée sous la forme

$$(I) \frac{d}{dx} \left( K \frac{dV}{dx} \right) + GV = 0.$$

où  $K$  et  $G$  sont des nouvelles fonctions de  $x$ , chose qui est toujours possible à l'aide d'une quadrature, sans toutefois

omettre l'observation que c'est sous cette forme réduite que se présentent les équations différentielles rencontrées dans plusieurs questions de Physique mathématique. L'importance de ces recherches a été tout de suite mesurée par Liouville qui lui donna des compléments remarquables dans deux notes présentées à l'Académie des Sciences dans les séances du 30 novembre 1835 et 27 juin 1836<sup>1</sup>. Malgré les énormes progrès accomplis par l'Analyse dans ce dernier siècle, les procédés de Sturm ont conservé toute leur valeur; pour s'en convaincre il suffit de consulter l'*Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (II. Bd., I. Tl., I. Hälfte, p. 442 et suiv.) et un cours de leçons sur le même sujet tenus par l'éminent auteur cité ci-dessous<sup>2</sup>.

#### 15. — L'équation différentielle

$$\frac{d}{dx} \left( k \frac{dV}{dx} \right) + (gV - l) = 0 .$$

se rencontre au début d'un travail dû à la collaboration de Sturm et Liouville, relatif à certains développements en séries, dont on connaît seulement un extrait, présenté à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. IV, p. 675) et reproduit dans le *Journal de mathématiques* [29]; nous regrettons de devoir en conséquence nous borner à dire, sur la foi des illustres auteurs, que la méthode employée pour sommer les séries considérées, étant simple et générale, peut servir à résoudre un grand nombre de questions du même genre.

On éprouve un regret semblable par rapport à un autre mémoire présenté par Sturm à l'Académie des Sciences, mais dont il ne publia qu'un résumé [22]; par ce travail notre mathématicien a complété l'étude des équations différentielles données par Lagrange et Laplace pour déterminer les variations séculaires des éléments de l'orbite d'une planète; ajoutons que ces équations importent pour une autre branche des mathématiques,

<sup>1</sup> Elles ont été publiées dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* avec les titres suivants: « Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries (*J. M.*, t. I, 1836, p. 255-265) et « Démonstration d'un théorème dû à M. Sturm et relatif à une classe de fonctions transcendentes (*Id.*, p. 269-77).

<sup>2</sup> M. BÔCHER, *Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes* (Paris, 1917).

car Lagrange avait prouvé qu'elles servent à représenter les petites oscillations d'un système de points matériels assujettis à des liaisons arbitraires. C'est l'étude que fit Sturm de ces équations, qui le mena à découvrir de nouvelles propositions, parmi lesquelles se trouve le théorème sur les équations algébriques qui porte son nom: voilà un nouveau motif pour regretter que ces recherches ne soient connues que d'une manière incomplète !

15 a. — Le mémoire sur une classe d'équations à différentielles partielles [27] est sans doute un des plus importants de ceux de notre mathématicien. Il a comme point de départ la considération du problème de la distribution de la chaleur dans une barre droite ou courbe formée d'une matière homogène ou non et d'une épaisseur constante ou variable, mais assez petite pour que tous les points d'une section plane perpendiculaire à l'axe aient la même température au même instant, la barre étant placée dans un milieu de température constante. Toutefois le mémoire a un caractère tout à fait mathématique (Sturm lui-même remarque que les équations de la chaleur ne sont pas d'une exactitude absolue, en conséquence on ne peut pas songer à une vérification expérimentale des résultats de l'analyse) et il regorge d'idées et de méthodes ayant une grande généralité.

Pour résoudre le problème énoncé, Sturm cherche, à l'aide d'une méthode connue, des valeurs particulières de la fonction représentant la température variable d'un point quelconque de la barre, en la supposant de la forme  $V^{-rt}$ ,  $V$  étant une fonction de l'abscisse  $x$  et du paramètre  $r$ , indépendante du temps. On arrive de la sorte à une équation transcendante en  $r$  qui n'a pas de racines imaginaires, ni égales, ni négatives, mais une infinité de racines positives, dont la plus petite peut être égale à zéro dans un cas particulier; en substituant à  $r$  une quelconque de ces racines on arrive à une infinité de solutions particulières satisfaisant à l'équation aux différences partielles du problème et aux équations aux limites. Les fonctions  $V$  correspondantes aux différentes racines de l'équation transcendante auxiliaire jouissent de plusieurs propriétés remarquables, dont les plus importantes sont les suivantes: a) Aucune de ces fonctions ne peut s'évanouir sans changer de signe; b) La première de ces

fonctions conserve le même signe dans toute l'étendue de la barre; c) La seconde change de signe pour un point situé entre les extrémités de la barre, la troisième pour deux, etc.; d) Deux fonctions correspondantes à des racines consécutives changent toujours de signe l'une après l'autre alternativement. Ainsi ces fonctions, données par une même équation différentielles linéaire du second ordre contenant un paramètre variable, jouissent de propriétés analogues à celles des sinus des multiples d'un arc. Ensuite Sturm établit des propositions non moins remarquables relatives aux valeurs *maxima* et *minima* des fonctions considérées. Ce ne sont pas les seuls résultats exposés par le célèbre auteur; mais — c'est une remarque de Voltaire — dire tout, c'est la manière sûre d'ennuyer. Toutefois nous ne pouvons pas taire que leur valeur est accrue par la considération qu'ils s'étendent, avec quelque modification, au mouvement linéaire de la chaleur dans un globe ou dans un cylindre composés de couches concentriques infiniment minces, homogènes ou hétérogènes. En dehors de l'importance de ces conclusions, le mémoire dont il s'agit doit être signalé (mais ce serait une remarque à faire sur tous les travaux du grand mathématicien !) pour son style d'une clarté vraiment lumineuse et pour les calculs, dont l'apparence modeste cache la grande profondeur.

## VII. — MÉCANIQUE.

16. — Les rapports entre l'Analyse et la Mécanique analytique sont si étroits et nombreux qu'on ne doit pas s'étonner si Sturm a su perfectionner dans quelques points de détails une branche des mathématiques à laquelle il s'était intéressé dès sa jeunesse (comp. n. 2) et sur laquelle il nous a laissé un cours de leçons [41] qui a été jugé un des meilleurs entre ceux de son temps. Nous allons dire quelques mots sur ses publications sur la dite matière.

En l'an 1841 il publia un mémoire [30] destiné à déterminer les cas d'applicabilité d'un théorème de Carnot relatif à la perte de force vive qui a lieu dans un système dont certaines parties sont dénuées d'élasticité et changent brusquement de vitesse en