I. — Les théorèmes A et B.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

I. — Les théorèmes A et B.

De la relation

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)$$

il suit

$$s_m = \sum_{h=0}^{n-1} c_h = \sum_{h=0}^{n-1} \cos\left(\varphi + \frac{2h\pi}{n}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{h=0}^{n-1} e^{i\left(\varphi+\frac{2h\pi}{n}\right)} + \sum_{h=0}^{n-1} e^{-i\left(\varphi+\frac{2h\pi}{n}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i(\varphi+2\pi)} - e^{i\varphi}}{e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1} + \frac{e^{-i(\varphi+2\pi)} - e^{-i\varphi}}{e^{\frac{-2i\pi}{n}} - 1}\right] = 0\ ,$$

pour $n \neq 1$.

On a de même, pour $m < n$

$$\sum_{h=0}^{n-1} \cos\left(\varphi + \frac{2mh\pi}{n}\right) = 0\ .$$

Or

$$\cos^m\varphi = \frac{1}{2^m}\left[e^{im\varphi} + \binom{m}{1} e^{i(m-2)\varphi} + \ldots + e^{-im\varphi}\right]$$

$$= \frac{1}{2^m}\left[2\cos m\varphi + 2\binom{m}{1}\cos(m-2)\varphi + \ldots\right]\ ;$$

le dernier terme est

$$\binom{m}{\frac{m}{2}} \quad \text{ou} \quad 2\binom{m}{\frac{m-1}{2}}\cos\varphi\ ,$$

suivant que m est pair où impair. D'où, en vertu des formules trouvées,

$$s_m = \sum_{h=0}^{n-1} c_h^m = \begin{cases} \dfrac{1}{2^m}\dbinom{m}{m-2}n & \text{pour } m \text{ pair}\ , \\ 0 & \text{pour } m \text{ impair}\ . \end{cases} \tag{1}$$

Les sommes s_m de degré impair sont donc nulles; celles de degré pair sont des fonctions essentiellement positives, rationnelles et entières de n. Tout cela pour $m < n$; pour $m \geqslant n$ les choses ne vont pas ainsi, et c'est là la raison du défaut de continuité que Sturm remarquait avec surprise dans ses théorèmes.

On a en particulier

$$s_2 = \frac{n}{2}, \qquad s_4 = \frac{3n}{8}.$$

En outre, une fonction symétrique (nous entendons toujours: rationnelle et entière) des quantités $\cos\frac{2h\pi}{n}$ de degré m sera, en vertu d'un théorème bien connu, une fonction rationnelle et entière de $s_1, s_2, \ldots s_m$ et, par conséquent, pour $m < n$, une fonction rationnelle et entière de n.

Les résultats obtenus nous permettent de démontrer rapidement les théorèmes de Sturm.

Prenons comme origine des coordonnées le centre d'un polygone régulier de n côtés, inscrit dans un cercle de rayon 1, et faisons passer l'axe x par le milieu de l'un des côtés. Les cosinus directeurs des perpendiculaires aux côtés seront alors

$$\cos\frac{2h\pi}{n}, \qquad \sin\frac{2h\pi}{n} \qquad (h = 0, 1, \ldots, n-1) \ ;$$

la distance du centre aux côtés sera $\cos\frac{\pi}{n}$.

Les équations normales des côtés seront alors

$$x \cos\frac{2h\pi}{n} + y \sin\frac{2h\pi}{n} + \cos\frac{\pi}{n} = 0,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\rho \cos\left(-\varphi + \frac{2h\pi}{n}\right) + \cos\frac{\pi}{n} = 0,$$

et les premiers membres de ces équations donneront les distances d_h du point (ρ, φ) aux côtés. Une fonction symétrique de degré m des d_h sera une fonction rationnelle et entière de ρ de degré m ayant comme coefficients des fonctions symétriques de degré $\leqslant m$ des quantités $\cos\left(-\varphi + \frac{2mh\pi}{n}\right)$, qui sont, comme nous l'avons trouvé pour $m < n$, des fonctions de n.

Notre fonction se réduit donc à une fonction rationnelle et entière de ρ et n, et le lieu des points pour lesquels elle a une valeur constante C sera représenté par l'équation

$$F(\rho , n) = C .$$

Ce lieu est donc constitué par *une ou plusieurs circonférences concentriques au polygone.* Le théorème B, dont A est un cas particulier, est ainsi démontré.

Le cas de plusieurs circonférences, dont nous donnons ci-dessous un exemple [1], ne peut pas se présenter dans le cas du théorème A.

En effet, on a

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \cos^i \frac{\pi}{n} \, s_{m-i} \, \rho^{m-i} \;;$$

dans le polynôme à droite les coefficients des puissances impaires de ρ pour $m < n$ sont nuls, et ceux des puissances paires sont des fonctions essentiellement positives de n, d'où il suit que l'équation en ρ

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h^m = \text{const.}$$

a tout au plus *une seule* racine positive.

---

[1] Considérons pour $n = 5$, la fonction symétrique des d_h

$$f(d_h) = \sum_{h=0}^{4} d_h^4 - \frac{9}{20}\left[\sum_{h=0}^{4} d_h^2\right]^2 .$$

On trouve, en écrivant δ pour $\cos\frac{\pi}{5}$,

$$\sum_{h=0}^{4} d_h^4 = \frac{15}{8}\rho^4 + 15\,\delta^2\rho^2 + 5\delta^4 ,$$

$$\sum_{h=0}^{4} d_h^2 = \frac{5}{2}\rho^2 + 5\delta^2 .$$

Il en résulte

$$f(d_h) = -\frac{15}{16}\rho^4 + \frac{15}{4}\delta^2\rho^2 - \frac{25}{4}\delta^4$$

et l'équation

$$f(d_h) = -\frac{55}{16}\delta^4$$

a les racines $\rho^2 = \delta^2$, $\rho^2 = 3\delta^2$.

Il faut toutefois remarquer que le théorème A ne subsiste pas pour $m = 1$. Il résulte en effet

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h = s_1 \rho + n \cos\frac{\pi}{n} = n \cos\frac{\pi}{n} ,$$

c'est-à-dire:

La somme (algébrique) des distances d'un point aux côtés d'un polygone régulier est constante pour tous les points du plan.

II. — Le théorème C.

Venons maintenant à la démonstration du théorème C.

Faisons passer l'axe des x par l'un des sommets du n-gone; les coordonnées des sommets seront alors

$$\cos\frac{2h\pi}{n} , \qquad \sin\frac{2h\pi}{n} \qquad (h = 0, 1, \ldots, n-1) ,$$

et les carrés des distances du point (x, y) ou (ρ, φ) aux sommets seront

$$\begin{aligned} l_h^2 &= \left(x - \cos\frac{2h\pi}{n}\right)^2 + \left(y - \sin\frac{2h\pi}{n}\right)^2 \\ &= \rho^2 + 1 - 2\rho\left(x\cos\frac{2h\pi}{n} + y \sin\frac{2h\pi}{n}\right) \\ &= \rho^2 + 1 - 2\rho\cos\left(-\varphi + \frac{2h\pi}{n}\right) . \end{aligned}$$

Il s'en suit:

$$\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \, 2^i \, s_i \, \rho^i (\rho^2 + 1)^{m-i} .$$

Or, si $m < n$, toutes les sommes s_i d'indices impairs sont nulles et toutes celles d'indices pairs sont positives; il résulte que $\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m}$ est un polynôme en ρ à coefficients positifs et dépendant seulement de n. L'équation

$$\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m} = \text{const.} \qquad (m < n)$$