II. — Le théorème C.

Il faut toutefois remarquer que le théorème A ne subsiste pas pour $m = 1$. Il résulte en effet

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h = s_1 \rho + n \cos\frac{\pi}{n} = n \cos\frac{\pi}{n} ,$$

c'est-à-dire:

La somme (algébrique) des distances d'un point aux côtés d'un polygone régulier est constante pour tous les points du plan.

II. — Le théorème C.

Venons maintenant à la démonstration du théorème C.

Faisons passer l'axe des x par l'un des sommets du n-gone; les coordonnées des sommets seront alors

$$\cos\frac{2h\pi}{n} , \qquad \sin\frac{2h\pi}{n} \qquad (h = 0, 1, \ldots, n-1) ,$$

et les carrés des distances du point (x, y) ou (ρ, φ) aux sommets seront

$$\begin{aligned} l_h^2 &= \left(x - \cos\frac{2h\pi}{n}\right)^2 + \left(y - \sin\frac{2h\pi}{n}\right)^2 \\ &= \rho^2 + 1 - 2\rho\left(x \cos\frac{2h\pi}{n} + y \sin\frac{2h\pi}{n}\right) \\ &= \rho^2 + 1 - 2\rho \cos\left(-\varphi + \frac{2h\pi}{n}\right) . \end{aligned}$$

Il s'en suit:

$$\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \, 2^i \, s_i \, \rho^i (\rho^2 + 1)^{m-i} .$$

Or, si $m < n$, toutes les sommes s_i d'indices impairs sont nulles et toutes celles d'indices pairs sont positives; il résulte que $\sum\limits_{h=0}^{n-1} l_h^{2m}$ est un polynôme en ρ à coefficients positifs et dépendant seulement de n. L'équation

$$\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m} = \text{const.} \qquad (m < n)$$

a donc tout au plus une racine positive, et le lieu géométrique qu'elle représente est constitué par *une seule* circonférence (réelle) au plus.

Le théorème C *est vrai non seulement pour les puissances paires inférieures à* n, *mais même pour celles inférieures à* 2n.

III. — Sur quelques polygones plans équilatères.

Losange. — Prenons comme origine des coordonnées le centre du polygone, et comme axes cartésiens obliques les parallèles à ses côtés; et soit λ l'angle des deux axes. En désignant par δ la demi-longueur des côtés, les équations normales des côtés sont

$$\pm x + \delta = 0 , \qquad \pm y + \delta = 0 .$$

Il suit de là

$$\frac{1}{\sin^2 \lambda} \sum_{h=0}^{3} d_h^2 = (x + \delta)^2 + (-x + \delta)^2 + (y + \delta)^2 + (-y + \delta)^2 =$$
$$= 2(x^2 + y^2 + 2\delta^2) ;$$

$$\frac{1}{\sin^3 \lambda} \sum_{h=0}^{3} d_h^3 = (x + \delta)^3 + (-x + \delta)^3 + (y + \delta)^3 + (-y + \delta)^3 =$$
$$= 2\delta[3(x^2 + y^2) + 2\delta^2] .$$

Les lieux $\sum_{h=0}^{3} d_h^2 = \text{const.}$ et $\sum_{h=0}^{3} d_h^3 = \text{const.}$ sont donc des ellipses, dont les diamètres parallèles aux côtés du losange sont conjugués et ont égale longueur.

Pour tout polygone équilatère ou non, les lieux $\sum_{h=0}^{n-1} d_h^2 = \text{const.}$ sont des ellipses. En effet, le premier membre est une fonction quadratique de x, y, qui, par sa nature, ne peut représenter qu'une conique bornée.

Si le polygone a deux axes de symétrie orthogonaux, on vérifie aisément que les lieux $\sum_{h=0}^{n-1} d_h^3$ sont aussi des ellipses.

Pour tout polygone équilatère la somme des distances d'un point aux côtés est constante pour tous les points du plan.