

## II. — Le théorème C.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Il faut toutefois remarquer que le théorème A ne subsiste pas pour  $m = 1$ . Il résulte en effet

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h = s_1 \rho + n \cos \frac{\pi}{n} = n \cos \frac{\pi}{n},$$

c'est-à-dire :

*La somme (algébrique) des distances d'un point aux côtés d'un polygone régulier est constante pour tous les points du plan.*

## II. — LE THÉORÈME C.

Venons maintenant à la démonstration du théorème C.

Faisons passer l'axe des  $x$  par l'un des sommets du  $n$ -gone; les coordonnées des sommets seront alors

$$\cos \frac{2h\pi}{n}, \quad \sin \frac{2h\pi}{n} \quad (h = 0, 1, \dots, n-1),$$

et les carrés des distances du point  $(x, y)$  ou  $(\rho, \varphi)$  aux sommets seront

$$\begin{aligned} l_h^2 &= \left(x - \cos \frac{2h\pi}{n}\right)^2 + \left(y - \sin \frac{2h\pi}{n}\right)^2 \\ &= \rho^2 + 1 - 2\rho \left(x \cos \frac{2h\pi}{n} + y \sin \frac{2h\pi}{n}\right) \\ &= \rho^2 + 1 - 2\rho \cos \left(-\varphi + \frac{2h\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Il s'en suit :

$$\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m} = \sum_{i=0}^m (-1)^i 2^i s_i \rho^i (\rho^2 + 1)^{m-i}.$$

Or, si  $m < n$ , toutes les sommes  $s_i$  d'indices impairs sont nulles et toutes celles d'indices pairs sont positives; il résulte

que  $\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m}$  est un polynôme en  $\rho$  à coefficients positifs et dépendant seulement de  $n$ . L'équation

$$\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m} = \text{const.} \quad (m < n)$$

a donc tout au plus une racine positive, et le lieu géométrique qu'elle représente est constitué par *une seule* circonférence (réelle) au plus.

*Le théorème C est vrai non seulement pour les puissances paires inférieures à n, mais même pour celles inférieures à 2n.*

### III. — SUR QUELQUES POLYGONES PLANS ÉQUILATÈRES.

*Losange.* — Prenons comme origine des coordonnées le centre du polygone, et comme axes cartésiens obliques les parallèles à ses côtés; et soit  $\lambda$  l'angle des deux axes. En désignant par  $\delta$  la demi-longueur des côtés, les équations normales des côtés sont

$$\pm x + \delta = 0, \quad \pm y + \delta = 0.$$

Il suit de là

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \lambda} \sum_{h=0}^3 d_h^2 &= (x + \delta)^2 + (-x + \delta)^2 + (y + \delta)^2 + (-y + \delta)^2 = \\ &= 2(x^2 + y^2 + 2\delta^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^3 \lambda} \sum_{h=0}^3 d_h^3 &= (x + \delta)^3 + (-x + \delta)^3 + (y + \delta)^3 + (-y + \delta)^3 = \\ &= 2\delta[3(x^2 + y^2) + 2\delta^2]. \end{aligned}$$

Les lieux  $\sum_{h=0}^3 d_h^2 = \text{const.}$  et  $\sum_{h=0}^3 d_h^3 = \text{const.}$  sont donc des ellipses, dont les diamètres parallèles aux côtés du losange sont conjugués et ont égale longueur.

Pour tout polygone équilatère ou non, les lieux  $\sum_{h=0}^{n-1} d_h^2 = \text{const.}$  sont des ellipses. En effet, le premier membre est une fonction quadratique de  $x, y$ , qui, par sa nature, ne peut représenter qu'une conique bornée.

Si le polygone a deux axes de symétrie orthogonaux, on vérifie aisément que les lieux  $\sum_{h=0}^{n-1} d_h^3$  sont aussi des ellipses.

Pour tout polygone équilatère la somme des distances d'un point aux côtés est constante pour tous les points du plan.