Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES THÉORÈMES GÉOMÉTRIQUES DE CHARLES STURM

Autor: Vivanti, G.

Kapitel: III. — Sur quelques polygones plans équilatères.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28596

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 18.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

a donc tout au plus une racine positive, et le lieu géométrique qu'elle représente est constitué par *une seule* circonférence (réelle) au plus.

Le théorème C *est vrai non seulement pour les puissances paires inférieures à* n, *mais même pour celles inférieures à* 2n.

III. — Sur quelques polygones plans équilatères.

Losange. — Prenons comme origine des coordonnées le centre du polygone, et comme axes cartésiens obliques les parallèles à ses côtés; et soit λ l'angle des deux axes. En désignant par δ la demi-longueur des côtés, les équations normales des côtés sont

$$\pm x + \delta = 0 , \qquad \pm y + \delta = 0 .$$

Il suit de là

$$\frac{1}{\sin^2 \lambda} \sum_{h=0}^{3} d_h^2 = (x + \delta)^2 + (-x + \delta)^2 + (y + \delta)^2 + (-y + \delta)^2 =$$
$$= 2(x^2 + y^2 + 2\delta^2) ;$$

$$\frac{1}{\sin^3 \lambda} \sum_{h=0}^{3} d_h^3 = (x + \delta)^3 + (-x + \delta)^3 + (y + \delta)^3 + (-y + \delta)^3 =$$
$$= 2\delta[3(x^2 + y^2) + 2\delta^2] .$$

Les lieux $\sum_{h=0}^{3} d_h^2 = \text{const.}$ et $\sum_{h=0}^{3} d_h^3 = \text{const.}$ sont donc des ellipses, dont les diamètres parallèles aux côtés du losange sont conjugués et ont égale longueur.

Pour tout polygone équilatère ou non, les lieux $\sum_{h=0}^{n-1} d_h^2 = \text{const.}$ sont des ellipses. En effet, le premier membre est une fonction quadratique de x, y, qui, par sa nature, ne peut représenter qu'une conique bornée.

Si le polygone a deux axes de symétrie orthogonaux, on vérifie aisément que les lieux $\sum_{h=0}^{n-1} d_h^3$ sont aussi des ellipses.

Pour tout polygone équilatère la somme des distances d'un point aux côtés est constante pour tous les points du plan.

Si x_h, y_h ($h = 0, 1, \ldots, n-1$) sont les coordonnées des sommets du polygone, et l est la longueur commune des côtés, les équations normales des côtés sont

$$\frac{1}{l}\left[(y_{h+1} - y_h)\,x + (x_h - x_{h+1})\,y + (x_{h+1}\,y_h - x_h\,y_{h+1})\right] = 0 \ .$$

Il suit immédiatement de là

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h = \frac{1}{l}\sum_{h=0}^{n-1} (x_{h+1}\,y_h - x_h\,y_{h+1}) \ .$$

IV. — Les polyèdres réguliers.

Je vais démontrer les théorèmes suivants:

D. — *La somme algébrique des distances d'un point aux faces d'un polyèdre régulier est constante pour tous les points de l'espace.*

E. — *Le lieu des points tels, que la somme des puissances* m^{ièmes} *de leurs distances aux faces d'un polyèdre régulier soit constante, est une sphère concentrique au polyèdre pour les valeurs suivantes de* m:

2 *pour le tétraèdre;*
2 *et* 3 *pour l'hexaèdre et l'octaèdre;*
2, 3 *et* 4 *pour le dodécaèdre et l'icosaèdre* [1].

La même chose, sauf l'unicité de la sphère, pour toute fonction symétrique des distances, avec les mêmes limitations pour le degré m.

F. — *Sous les mêmes conditions des théorèmes précédents pour le nombre* m, *le lieu des points tels, que la somme des* 2m^{ièmes} *puissances de leurs distances aux sommets d'un polyèdre soit constante, est une sphère concentrique au polyèdre.*

Les théorèmes D *et* E.

Prenons sur la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine des coordonnées, n points distribués uniformément sur un

[1] On peut dire que m doit être moindre que le nombre des sommets disposés en couronne autour d'un axe dans le polyèdre respectif.