Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CERCLES FOCAUX DES CONIQUES

Autor: Lebesgue, Henri

Kapitel: 7. — Nature des courbes C lorsque k égale 1.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28584

Un cas particulier vaut d'être signalé; c'est celui où les deux crochets seraient nuls. Alors le cercle δ serait tangent à Oy en O; pour D confondu avec Ox, Γ se réduirait au point O et la relation $\overline{MO}^2 = K\,\overline{MD}^2$ montre que $\mathcal{C}$ est une hyperbole réduite à ses asymptotes. On laissera de côté ce cas limite dans la suite.

7. — Nature des courbes $\mathcal{C}$ lorsque k égale 1.

Pour éviter des complications de rédaction, on a supposé $k \neq 1$ depuis le § 5; pourtant l'étude des courbes $\mathcal{C}$ paraboliques peut être faite par les procédés des deux paragraphes précédents, seulement la lettre Γ désignera maintenant l'axe radical du faisceau H, γ. Il suffira donc de montrer que la marche de l'étude pour $k = 1$ pourrait être parallèle à celle de l'étude déjà faite.

La relation (1) donne pour tout point M_1 du plan

$$\mathcal{P}(M_1, \gamma) - \mathcal{P}(M_1, H) + 2\,\overline{\omega H} \cdot \overline{M_1 \Gamma} = 0 \ ,$$

ce qui s'écrit encore:

$$\mathcal{P}(M_1, \gamma) - \overline{M_1 d}^2 = \overline{M_1 D}^2 - 2\,\overline{\omega H} \cdot \overline{M_1 \Gamma} \ .$$

Or $\mathcal{C}$ est le lieu des points M_1 pour lequel le premier membre est nul, *donc* $\mathcal{C}$ *est aussi le lieu des points* M_1 *tels que l'on ait:*

$$\overline{M_1 D}^2 - 2\,\overline{\omega H} \cdot \overline{M_1 \Gamma} = 0 \ ; \qquad (17)$$

ou si l'on veut:

$$\sin\psi \cdot \overline{M_1 D}^2 - 2\,\overline{\omega d_0} \cdot \overline{M_1 \Gamma} = 0 \ , \qquad (17')$$

ψ étant l'angle de Γ et de ωx.

Réciproquement, on déduira de l'équation (17) des cercles focaux ayant leurs centres sur ωx; γ est l'un d'eux. Les relations entre la série des droites Γ et celle des cercles focaux sont les mêmes que précédemment, seulement la relation (14) s'est simplifiée; devenue

$$\overline{\omega\omega_1} = \overline{dd_1} \qquad (14')$$

elle exprime la propriété déjà énoncée: la sous-normale est constante.

Quant au fait que deux droites Γ et Γ_1 se coupent sur la médiatrice de HH_1, c'est une propriété bien connue des diamètres de la parabole.

Pour démontrer que *nos courbes $\mathcal{C}$ sont effectivement des paraboles*, on pourrait procéder comme au paragraphe précédent, on ne rencontrerait que des simplifications; mais il suffira de noter qu'en prenant D confondue avec ωx, auquel cas la tangente au point M de $\mathcal{C}$ situé sur ωx est perpendiculaire à ωx, nous avons l'équation de $\mathcal{C}$ en coordonnées rectangulaires par la formule (17'); ωd est le paramètre de notre parabole.

8. — Les deux familles de cercles focaux des coniques a centre.

J'ai maintenant achevé ce que je m'étais proposé de faire quant à la théorie générale. Sans doute cette étude pourrait être, comme toute étude, poussée plus loin, mais je me bornerai à donner encore quelques indications que les professeurs pourraient utiliser pour la construction d'exercices. A cet égard, la caractérisation des familles de cercles focaux est essentielle. Elle peut être faite de bien des manières; j'indique de nouvelles formes de cette caractérisation dans le cas des coniques à centre.

Reprenons la relation, qui nous a servi dans le § 5, entre les puissances d'un point M par rapport à γ, Γ et H, et prenons pour M le point ω; nous avons:

$$-r^2 + (k-1)\left[\overline{\omega\Omega}^2 - R^2\right] - k\overline{\omega H}^2 = 0 ,$$

ou

$$-r^2 - (k-1)R^2 + \overline{\omega\Omega}^2\left[k - 1 - \frac{k}{K^2}\right] = 0 .$$

Simplifions en multipliant par $\frac{-k}{k-1} = -K$, on a:

$$Kr^2 + kR^2 - \overline{\omega\Omega}^2 = 0 . \qquad (18)$$

Cette relation, qui aurait permis une recherche facile des foyers, s'écrit, en supposant que ωx soit l'axe focal, en conservant