

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES CARRÉS MAGIQUES DE FRANKLIN
Kapitel: Ajustements.
Autor: Lehmer, Derrick N.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28598>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

somme et $n/2$ paires ayant la seconde: le total donnera la constante magique $n(4n^2 + 1)$. Si n pair n'est pas un multiple de 4, il y aura $n/2 + 1$ sommes de la première sorte et $n/2 - 1$ sommes de la seconde et l'on trouvera un total trop grand de n pour que le chevron principal de la seconde série soit magique. Le chevron suivant à droite sera alors trop petit de n , et ainsi de suite alternativement. Ces résultats peuvent être résumés par le théorème suivant:

THÉORÈME X: *Dans le carré de Franklin les rangées et la première série de chevrons sont magiques et il est à grille, pour tous les ordres. Si son ordre est un multiple de 4, les colonnes sont aussi magiques. Si son ordre est un multiple de 8, la seconde série de chevrons est également magique.*

AJUSTEMENTS.

Un carré, dont les rangées et les colonnes sont magiques, reste magique après une permutation quelconque des rangées ou des colonnes. Si toutefois nous désirons conserver la propriété de la grille, nous devons restreindre ces permutations. On voit facilement que:

THÉORÈME XI: *Les seules permutations, effectuées sur les lignes d'un carré magique, qui n'altèrent pas la propriété de la grille, sont celles qui échangent entre elles les rangées ou colonnes paires et les rangées ou colonnes impaires.*

Nous considérerons d'abord l'effet de telles transformations sur les chevrons de la première série. Soient E et F deux termes, qui sont situés sur le même chevron de la première série. S'ils sont dans la même rangée, il est clair que les colonnes dans lesquelles ils se trouvent peuvent être échangées, sans que la somme des termes de ce chevron en soit modifiée. S'ils sont dans des rangées différentes, ils sont alors les coins opposés d'un rectangle, et nous appellerons les deux autres coins E' et F'. On voit alors que l'échange des colonnes, dans lesquelles E et F se trouvent, leur substituera les nombres E' et F' dans le chevron, dont la somme des termes sera modifiée de la *différence en croix* $E + F - (E' + F')$. Si cette différence est nulle, la

somme des termes du chevron ne sera naturellement pas altérée par l'échange de ces deux colonnes. Nous allons maintenant démontrer le théorème fondamental qui suit :

THÉORÈME XII: *La condition nécessaire et suffisante pour que la différence en croix, entre les termes des coins d'un rectangle quelconque soit nulle, est qu'il comprenne un nombre impair de rangées et de colonnes.*

Pour prouver que la condition est suffisante, considérons un rectangle quelconque ayant un nombre impair de rangées et de colonnes. Les côtés supérieurs et inférieurs sont alors tous deux dans des rangées impaires ou tous deux dans des rangées paires, et comme les nombres de ces rangées croissent dans la même direction, alternativement en deux progressions arithmétiques de raison $4n$, les termes supérieurs du rectangle, ainsi que les inférieurs, diffèrent entre eux d'un même multiple de $4n$. Les quatre termes des coins du rectangle peuvent donc être désignés par E , $E + 4kn$ et E' , $E' + 4kn$. La différence en croix est évidemment zéro et la condition est suffisante.

Supposons maintenant qu'il y ait un nombre pair de rangées, et soient E et F les termes supérieurs, E' et F' les inférieurs. Puisque les nombres croissent dans des directions opposées sur les côtés supérieur et inférieur du rectangle, E et F' sont tous deux plus grands ou tous deux plus petits que E' et F et la différence en croix n'est par conséquent pas nulle.

Supposons qu'il y ait un nombre pair de colonnes et un nombre impair de rangées. La différence en croix pour ce rectangle sera la même que pour tout rectangle ayant les mêmes rangées et seulement deux colonnes, obtenues en déplaçant ses côtés latéraux d'un nombre pair de colonnes, parce que ce déplacement augmente (ou diminue) les deux termes d'un côté d'un même multiple de $4n$, qui disparaîtra dans la différence en croix.

Nous pouvons alors considérer la différence en croix des termes d'un rectangle à deux colonnes, dont les éléments inférieurs appartiennent à la même excursion et, comme le nombre des rangées est impair, les éléments supérieurs appartiendront à cette même excursion. Les quatre éléments peuvent alors être

désignés par k , $2\alpha n - k + 1$ et k' , $2\alpha n - k' + 1$, et l'on voit que la différence en croix est $2(k - k')$, qui n'est pas égal à zéro. Un rectangle, qui a un nombre impair de rangées et un nombre pair de colonnes ne peut pas avoir une différence en croix nulle.

De ce résultat nous déduisons sans difficulté le théorème suivant :

THÉORÈME XIII: *Deux colonnes quelconques, toutes deux de rang pair ou toutes deux de rang impair, peuvent être permutées, sans que la magie de la première série de chevrons soit troublée, si elles sont situées toutes deux du même côté de la médiane verticale du carré.*

Comme nous l'avons vu, le carré de Franklin présente toujours la magie dans les rangées et dans la première série de chevrons, et il est à grille. Un ajustement quelconque pour rendre magique la seconde série de chevrons ne doit pas modifier ces propriétés. Cela signifie que, pour qu'il soit permis d'échanger deux colonnes, il faut qu'elles soient toutes deux de rang pair, ou bien de rang impair, et du même côté de la médiane verticale. Mais de telles transformations, étant associées à une différence en croix nulle, ne produiront aucun changement dans les sommes de la seconde série de chevrons. Il est par conséquent inutile de rechercher des ajustements de la seconde série par des permutations quelconques de colonnes.

C'est pourquoi nous allons étudier l'effet des permutations de rangées, et pour conserver la propriété de la grille, nous devons permuter les rangées paires entre elles et les rangées impaires entre elles. La discussion et les résultats finals dépendent de la forme de l'ordre du carré par rapport au module 8. Nous considérerons les quatre cas, où l'ordre est $2n$, avec $n = 4r + 1$, $4r + 2$, $4r + 3$ et $4r + 4$.

Premier cas. $n = 4r + 1$. — Ici, l'ordre est impairement pair et les colonnes ne sont pas magiques. Mais comme nous l'avons vu, on y remédie facilement en permutant les éléments de la troisième rangée, qui appartiennent à la même excursion. Cela n'altère pas la magie des rangées, ni celle de la première série de chevrons, ni la propriété de la grille. On voit facilement que cela

diminue d'une unité les sommes des termes des chevrons impairs de la deuxième série et augmente les pairs de la même quantité ¹.

Après avoir fait cet ajustement, il reste à rendre magiques les chevrons de la seconde série par des permutations de rangées paires ou de rangées impaires, ou par les deux. L'effet de ces permutations sur les sommes des termes des chevrons est mesuré par les différences en croix et celles-ci sont de la forme $2(k - k')$, où k et k' sont deux éléments quelconques de la première excursion, situés dans la même colonne. Il faut donc trouver deux éléments tels que $2(k - k') = n - 1$. On y arrive facilement, car nous pouvons prendre $k = n$ et $k' = (n + 1)/2$, puisque dans ce cas k et k' seront impairs tous les deux et par suite sont situés les deux dans la n^{me} colonne. Nous avons donc l'ajustement simple suivant:

THÉORÈME XIV: *Si l'ordre du carré de Franklin est $2n$, où $n = 4r + 1$, une permutation des éléments de la troisième rangée, qui appartiennent à la même excursion, suivie d'une permutation de la n^{me} rangée avec la $(2n - 1)^{\text{e}}$, qui est immédiatement au-dessous de la rangée supérieure, rendra le carré parfaitement magique.*

Le plus petit carré de cet ordre est celui de 10, $C = 505$. Nous le donnons avant et après ajustements (fig. 5 et 6).

55	66	75	86	95	6	15	26	35	46
45	36	25	16	5	96	85	76	65	56
54	67	74	87	94	7	14	27	34	47
48	33	28	13	8	93	88	73	68	53
57	64	77	84	97	4	17	24	37	44
43	38	23	18	3	98	83	78	63	58
52	69	72	89	92	9	12	29	32	49
50	31	30	11	10	91	90	71	70	51
59	62	79	82	99	2	19	22	39	42
41	40	21	20	1	100	81	80	61	60

Fig. 5.

¹ On démontre que, quand n est impair, ces sommes sont alternativement égales à $C + n$; après la permutation susvisée, elles deviennent égales à $C + (n - 1)$. (N. d. T.)

55	66	75	86	95	6	15	26	35	46
43	38	23	18	3	98	83	78	63	58
54	67	74	87	94	7	14	27	34	47
48	33	28	13	8	93	88	73	68	53
57	64	77	84	97	4	17	24	37	44
45	36	25	16	5	96	85	76	65	56
52	69	72	89	92	9	12	29	32	49
51	30	31	10	11	90	91	70	71	50
59	62	79	82	99	2	19	22	39	42
41	40	21	20	1	100	81	80	61	60

Fig. 6.

Deuxième cas. $n = 4r + 2$. — Dans ce cas, aucun ajustement n'est nécessaire pour les colonnes. A l'aide d'une analyse qu'il serait trop long de reproduire ici, l'auteur a démontré qu'il est impossible de trouver, dans ce cas, deux rangées telles que leur permutation puisse ajuster les sommes dans les chevrons de la deuxième série. Il est possible, cependant, d'obtenir ce résultat par la permutation de deux paires de rangées, de la façon suivante :

THÉORÈME XV: *Dans le carré de Franklin d'ordre $2n > 4$, où $n = 4r + 2$, les diverses conditions de magie sont réalisées, excepté pour la seconde série de chevrons. Il peut être ajusté de façon à rendre ces derniers également magiques par la permutation de la 2^{me} rangée avec la $(n + 4)$ ^{me} et en même temps la permutation de la 5^{me} rangée avec la $(n + 3)$ ^{me}.*

Le théorème ne s'applique manifestement pas au carré 4×4 , puisqu'il n'y a pas de 5^{me} rangée à permuter. Dans le carré de Franklin d'ordre 4, on ne peut pas rendre magique la seconde série de chevrons par des permutations de rangées quelles qu'elles soient. Nous donnons le carré parfait d'ordre 12, $C = 870$, soit le plus petit qui puisse illustrer ce cas (fig. 7).

79	90	103	114	127	138	7	18	31	42	55	66
65	56	41	32	17	8	137	128	113	104	89	80
74	95	98	119	122	143	2	23	26	47	50	71
70	51	46	27	22	3	142	123	118	99	94	75
81	88	105	112	129	136	9	16	35	40	57	64
63	58	38	34	15	10	135	130	111	106	87	82
76	93	100	117	124	141	4	21	28	45	52	69
68	53	44	29	20	5	140	125	116	101	92	77
83	86	107	110	131	134	11	14	35	38	59	62
61	60	37	36	13	12	133	132	109	108	85	84
78	91	102	115	126	139	6	19	30	43	54	67
72	49	48	25	24	1	144	121	120	97	96	73

Fig. 7.

Troisième cas. $n = 4r + 3$. — Comme dans le premier cas, un ajustement doit être fait pour rendre les colonnes magiques. Comme dans le deuxième cas, il n'existe pas de permutation unique pouvant ajuster la seconde série de chevrons. Ainsi que l'indique le théorème suivant, exception faite pour les carrés d'ordres 6 et 14, il est possible de trouver deux permutations de rangées, qui rendent le carré parfait.

THÉORÈME XVI: *Le carré de Franklin d'ordre $2n > 14$, où $n = 4r + 3$, peut être rendu parfaitement magique par la permutation des éléments de la troisième rangée qui appartiennent à la même excursion, suivie des permutations de la 2^{me} rangée avec la $(2n - 2)$ ^{me} et de la 4^{me} rangée avec la $(n + 5)$ ^{me}.*

Le théorème ne s'applique évidemment pas à l'ordre 6, puisque $n + 5 = 8$ dans ce cas, et qu'il n'y a pas de 8^{me} rangée. Pour l'ordre 14, la $(2n - 2)$ ^{me} rangée est la même que la $(n + 5)$ ^{me} et la permutation ne peut pas être faite. On ne peut pas trouver d'ajustement de rangées pouvant rendre magique, dans le carré de Franklin d'ordre 6, la seconde série de chevrons. Le carré d'ordre 14 peut être ajusté par une permutation entre la 4^{me} rangée et la 12^{me} suivie d'une autre entre la 5^{me} rangée

et la 11^{me}. Le carré ajusté d'ordre 14 est donné par la figure 8, $C = 1379$:

105	120	133	148	161	176	189	8	21	36	49	64	77	92
91	78	63	50	35	22	7	190	175	162	147	134	119	106
100	125	128	153	156	181	184	13	16	41	44	69	72	97
87	82	59	54	31	26	3	194	171	166	143	138	115	110
107	118	135	146	163	174	191	6	23	34	51	62	79	90
89	80	61	52	33	24	5	192	173	164	145	136	117	108
102	123	130	151	158	179	186	11	18	39	46	67	74	95
96	73	68	45	40	17	12	185	180	157	152	129	124	101
109	116	137	144	165	172	193	4	25	32	53	60	81	88
94	75	66	47	38	19	10	187	178	159	150	131	122	103
104	121	132	149	160	177	188	9	20	37	48	65	76	93
99	70	71	42	43	14	15	182	183	154	155	126	127	98
111	114	139	142	167	170	195	2	27	30	55	58	83	86
85	84	57	56	29	28	1	196	169	168	141	140	113	112

Fig. 8.

Quatrième cas. $n = 4r + 4$. — Ce cas est le seul qui n'exige aucun ajustement. Le carré de Franklin, dont l'ordre est un multiple de 8, est parfait tel qu'il est.

La méthode de construction des carrés de Franklin peut être généralisée, en introduisant les nombres non pas dans l'ordre naturel, mais suivant certaines progressions arithmétiques. Toutefois, sauf pour quelques-unes de ces progressions, les ajustements pour les colonnes et pour la seconde série de chevrons peuvent devenir très compliqués. Dans ces carrés, les rangées et la première série de chevrons sont toujours magiques et on y trouve également la grille.