Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DE LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE ET DU RAPPORT DE DEUX RAPPORTS DONNÉS

Autor: Tripier, Henri

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28600

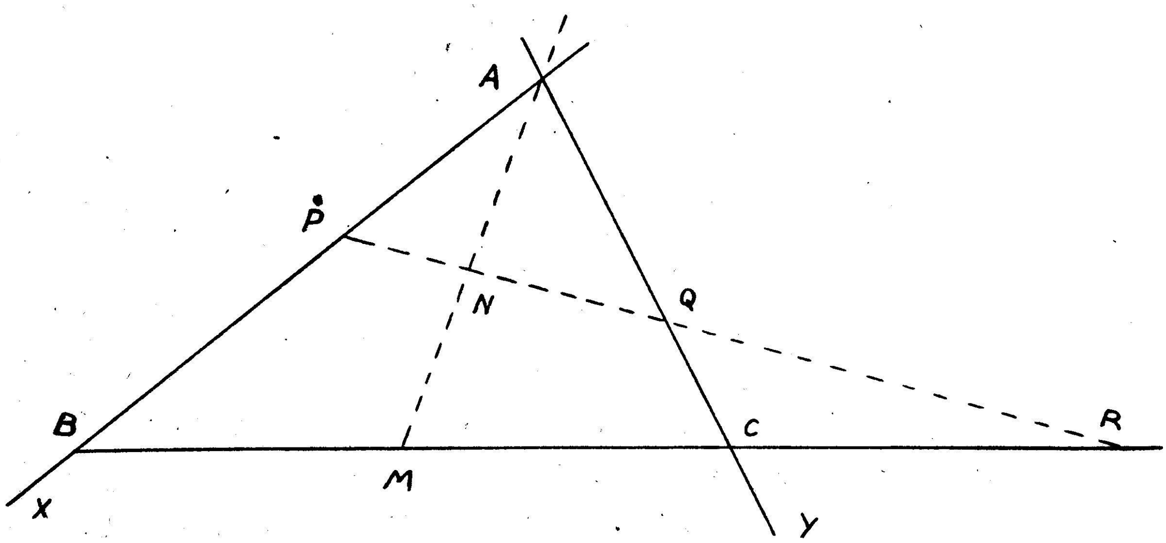
CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DE LA MOYENNE ARITHMÉTIQUE ET DU RAPPORT DE DEUX RAPPORTS DONNÉS

PAR

Henri Tripier (Paris).

Soient donnés les rapports p et q, valeurs algébriques: valeurs absolues affectées de signes.

Construction. — Sur la droite AX construisons le rapport p, de la manière suivante: $\frac{AB}{AP} = p$, et sur la droite AY, distincte de AX, construisons le rapport q, de la manière suivante: $\frac{AC}{AQ} = q$.



Traçons les droites BC et PQ. Ces droites se rencontrent en R. Traçons la droite déterminée par le point A et le milieu M de BC. Cette droite rencontre la droite PQ au point N.

I. *Moyenne.* — La moyenne arithmétique des rapports p et q est le rapport $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AN}}$.

En effet, le théorème de Ménélaüs, appliqué aux triangles ABM et AMC coupés par la transversale PQR, donne

$$\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RM}} \cdot \frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{NA}} \cdot \frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PB}} = +1$$

et

$$\frac{\mathrm{RM}}{\mathrm{RC}} \cdot \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NM}} = +1 ,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}} = \frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RM}} \cdot \frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{NA}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{QA}} = \frac{\mathrm{RC}}{\mathrm{RM}} \cdot \frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{NA}} ,$$

donc

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}} + \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{QA}} = \frac{1}{\mathrm{RM}} \cdot \frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{NA}} (\mathrm{RB} + \mathrm{RC})$$

où $\mathrm{RB} + \mathrm{RC} = 2\mathrm{RM}$, de sorte que

$$\frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{PA}} + \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{QA}} = 2\frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{NA}} . \tag{1}$$

Mais

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AP}} = 1 + \frac{\mathrm{PB}}{\mathrm{AP}} , \qquad \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AQ}} = 1 + \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{AQ}} .$$

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AN}} = 1 + \frac{\mathrm{NM}}{\mathrm{AN}} . \tag{2}$$

Par conséquent, changeant les signes de tous les termes de la relation (1), puis ajoutant 2 à chacun de ses deux membres, on trouve la relation

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AP}} + \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AQ}} = 2\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AN}} ;$$

c'est celle qui a été annoncée.

II. *Rapport.* — Le rapport $\frac{p}{q}$ est le rapport $\frac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{PN}}$.

En effet, la proportionnalité des côtés aux sinus des angles opposés, appliquée aux triangles ABM, AMC, APN, ANQ, donne

$$\frac{\mathrm{BM}}{\sin 1} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin \mathrm{M}}, \qquad \frac{\mathrm{MC}}{\sin 2} = \frac{\mathrm{CA}}{\sin \mathrm{M}},$$

$$\frac{\mathrm{PN}}{\sin 1} = \frac{\mathrm{AP}}{\sin \mathrm{N}}, \qquad \frac{\mathrm{NQ}}{\sin 2} = \frac{\mathrm{QA}}{\sin \mathrm{N}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{PN}} = p\frac{\sin \mathrm{N}}{\sin \mathrm{M}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{NQ}} = q\frac{\sin \mathrm{N}}{\sin \mathrm{M}}$$

où BM = MC, de sorte que

$$\frac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{PN}} = \frac{p}{q};$$

c'est la relation qui a été annoncée.

Application. — La somme géométrique des moments de deux vecteurs parallèles, par rapport à un point quelconque A, est le moment de la résultante de ces deux vecteurs, par rapport au même point.

Soient p et q les valeurs algébriques des deux vecteurs composants.

Par le point A menons un plan perpendiculaire à la direction commune de ces vecteurs et de leur résultante. Ce plan est percé par les vecteurs composants en P et Q respectivement, et par la résultante en un point de la droite PQ divisant le segment PQ dans le rapport inverse de celui des valeurs des vecteurs passant respectivement par P et par Q.

Sur AP portons la valeur du moment de p par rapport à A: $\mathrm{AB} = p \cdot \mathrm{AP}$, et sur AQ portons la valeur du moment de q par rapport à A: $\mathrm{AC} = q \cdot \mathrm{AQ}$.

Traçons BC, prenons en le milieu M, et joignons A à M.

Nous venons de voir que AM rencontre PQ au point N tel que $\mathrm{NQ}/\mathrm{PN} = p/q$. Ce point N est celui où la résultante des deux vecteurs p et q perce le plan APQ. Il est sur la diagonale du parallélogramme construit sur AB et AC.

Le moment de cette résultante, par rapport à A, a pour valeur

$$(p + q) \cdot \mathrm{AN} = \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AP}} + \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AQ}}\right) \cdot \mathrm{AN} .$$

Nous venons de voir que ce produit est 2AM, c'est-à-dire la mesure de la diagonale du parallélogramme construit sur AB et AC.

Le vecteur-moment de p est dans le plan APQ et perpendiculaire à AP, dans un sens convenable; le vecteur-moment de q est dans le plan APQ et perpendiculaire à AQ, dans le sens voulu; enfin le vecteur-moment de la résultante est dans le plan APQ et perpendiculaire de même à AN. Et ces vecteurs-moments ont pour valeurs respectivement AB, AC et 2AM.

Par conséquent, nous aurons ces trois vecteurs-moments en faisant tourner le parallélogramme construit sur AB et AC, dans son plan, de $\pi/2$, dans le sens convenable.

Le moment de la résultante est donc bien la somme géométrique des moments des deux composantes.

PROBLÈMES SUR LES TRIANGLES INSCRITS DANS UN TRIANGLE DONNÉ

PAR

Ervin FELDHEIM (Budapest).

I. — Considérons, pour commencer, un triangle arbitraire $A_0 B_0 C_0$ et prenons les points A_1, B_1, C_1 respectivement sur les côtés $B_0 C_0$, $C_0 A_0$, $A_0 B_0$. Construisons le triangle $A' B' C'$ circonscrit autour de $A_0 B_0 C_0$, et tel que les côtés respectifs soient parallèles à ceux de $A_1 B_1 C_1$. Introduisons pour les aires des triangles précédents les notations suivantes:

$$A_0B_0C_0 = t_0 \ , \quad A_1B_1C_1 = t_1 \ , \quad A'B'C' = t' \ .$$