

9. – Propriétés diverses.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Le cercle de diamètre MT considéré au § 4 se réduit pour le cas de l'asymptote, M étant à l'infini, à la perpendiculaire en T à OT. Comme ce cercle est orthogonal à Γ , cette perpendiculaire est ΩT . (Si l'on remarque que les pieds des normales abaissées de Ω sur l'hyperbole sont les points de rencontre de cette hyperbole et de D, on reconnaît là une propriété connue que nous démontrons incidemment.)

L'axe radical Δ de Γ et Γ_0 étant équidistant des droites directrices D et Ox coupe l'asymptote au milieu Δ_0 de OT. Donc les symétriques S et S' de s et s' par rapport à Δ_0 sont sur Γ et nous avons cet énoncé, dû à M. H. Mirabel (*loc. cit.*) : *les cercles focaux d'une hyperbole ayant leurs centres sur l'axe non focal découpent sur les asymptotes des segments de longueur 2a.*

Le cercle Γ appartient au faisceau défini par H et par le cercle γ réduit au point F; H et F sont les deux cercles points de ce faisceau, donc sont deux points inverses par rapport à Γ et le rayon R de celui-ci est donné par :

$$R^2 = \overline{\Omega H} \cdot \overline{\Omega F} = \overline{\Omega F}^2 \cdot \frac{O d_0}{O F} = \overline{\Omega F}^2 \cdot \frac{\overline{O s}^2}{\overline{O F}^2} = \frac{a^2}{c^2} \cdot \overline{\Omega F}^2 .$$

Ainsi, *les cercles focaux considérés sont vus du foyer sous un angle constant, égal au supplément de l'angle des asymptotes.* Cette seconde forme, qui découle tout de suite des formules (19), permettrait d'obtenir autrement l'énoncé de M. Mirabel.

9. — PROPRIÉTÉS DIVERSES.

Il est clair que des énoncés comme ceux du numéro précédent permettent de construire des problèmes intéressants; on a vu aussi qu'en étudiant les cercles focaux on rencontrait de nouvelles démonstrations des propriétés classiques. Il resterait à indiquer des généralisations des propriétés des foyers aux cercles focaux assez simples pour qu'elles puissent servir à mieux faire comprendre ces propriétés et leurs démonstrations; il me semble que, si l'on veut rester vraiment élémentaire, le choix est bien plus limité.

Naturellement, de la propriété exprimée par (7), résultent les généralisations de la formule $\pm MF \pm MF' = 2a$, à deux ou plus de deux cercles focaux de la même série; je n'insiste pas et je passe aux propriétés angulaires.

Soit une droite Λ coupant la conique \mathcal{C} en M et M' et en K la droite directrice d associée au cercle γ de centre ω . Le cercle auxiliaire Z du § 3 qui passe par M et M' , appartenant au faisceau K, γ , admet pour polaire de K la polaire de K par rapport à γ , c'est-à-dire la perpendiculaire à ωK au point k inverse de K par rapport à γ . Cette perpendiculaire kP coupant MM' au point conjugué harmonique de K , la droite ωkK est l'une des bissectrices de l'angle des droites kM, kM' joignant aux points M et M' où la droite Λ coupe \mathcal{C} , l'inverse k par rapport à γ du point K où Λ coupe la droite directrice d .

Par K , faisons passer une autre sécante λ coupant \mathcal{C} en m et m' , kP passera aussi par le conjugué harmonique de K par rapport à m et m' ; donc kP contient le point de rencontre de mm' et de MM' . Soit P ce point. Faisons tendre maintenant λ vers Λ :

Si MM' coupe la droite directrice d de γ en K , et si k est l'inverse de K par rapport à γ , les deux bissectrices de l'angle MkM' sont la droite ωkK et la droite kP , P étant le point de rencontre des tangentes à \mathcal{C} en M et M' .

C'est une généralisation du premier théorème de Poncelet. Si, au contraire, nous avons fait varier Λ de façon que M reste fixe et que M' tende vers M , nous aurions obtenu une nouvelle démonstration de l'existence de la tangente en M et prouvé que cette tangente MT est telle que, du point t inverse par rapport à γ du point T de cette tangente située sur d , on voie MT sous un angle droit.

En d'autres termes, T est le pôle par rapport à γ de la droite pM joignant M au pôle p de d par rapport à γ ; c'est une autre forme de la propriété déjà obtenue pour la tangente.

On construira donc MT en prenant le point T où la polaire de M par rapport à γ coupe d . Le pied m de cette polaire sur ωM est tel que:

$$Mm \cdot M\omega = \mathcal{P}(M, \gamma) \quad \text{et} \quad Mm = MT \cos \widehat{TM\omega},$$

d'où, puisque

$$MT = \frac{Md}{\cos \varphi} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}(M, \gamma)}{k}} \cdot \frac{1}{\cos \varphi},$$

$$\frac{M\omega \cdot \cos \widehat{TM\omega}}{\sqrt{|\mathcal{P}(M, \gamma)|}} = \sqrt{|k|} \cos \varphi.$$

Si M est extérieur à γ , $k > 0$, $\frac{\sqrt{\mathcal{P}(M, \gamma)}}{M\omega}$ est le cosinus du demi-angle sous lequel de M on voit γ ; soit $\cos \alpha(M, \gamma)$.

Si M est intérieur à γ , $k < 0$, $\frac{\sqrt{-\mathcal{P}(M, \gamma)}}{M\omega}$ est la tangente du demi-angle sous lequel de ω on voit la corde de γ dont M est le milieu; soit $\text{tg } \beta(M, \gamma)$. On a donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} k > 0, \quad \frac{\cos \widehat{TM\omega}}{\cos \alpha(M, \gamma)} = \sqrt{k} \cos \varphi, \\ k < 0, \quad \frac{\cos \widehat{TM\omega}}{\text{tg } \beta(M, \gamma)} = \sqrt{-k} \cos \varphi. \end{array} \right. \quad (20)$$

Le fait que le premier membre des formules (20) est, pour M fixe sur \mathcal{C} , le même pour tous les cercles focaux d'une même série est la généralisation à deux tels cercles de la propriété classique: la tangente bissecte les rayons vecteurs.

10. — AUTRES MÉTHODES.

CERCLES FOCaux DES OVALES DE DESCARTES.

Ces exemples suffiront à montrer les exercices de généralisation que l'on peut envisager; bien que nos énoncés ne constituent pas les seules généralisations possibles, les cas où l'on obtiendrait des résultats élégants et assez simples pour être utiles à de jeunes élèves paraissent peu nombreux. Il faut noter d'ailleurs que l'exposé actuel se prête mal à la généralisation des propriétés les plus élémentaires des coniques lesquelles résultent, non de la définition que nous avons généralisée par la formule (7), mais de celle-ci: une conique est le lieu du centre M