

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1938)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LA THÉORIE DE L'ORDRE DES FIGURES RÉELLES ET LES TRAVAUX DE M. HAUPT  
**Autor:** Linsman, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28585>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 07.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Les cercles  $\gamma_1, \gamma_2$  jouent donc le rôle des foyers; ce sont les cercles focaux de l'ovale. Et, puisque la projection d'une courbe tracée sur une quadrique est tangente au contour apparent en projection aux points où elle le rencontre, ces cercles focaux sont ceux des cercles bitangents à l'ovale dont les centres sont sur l'axe de symétrie  $F_1F_2F_3$  de la courbe.

L'étude des ovales est donc à recommander aux aspirants professeurs; en particulier, les définitions des coniques, à l'aide de deux foyers ou d'un foyer et d'une directrice, leur apparaîtront alors comme deux cas particuliers de la définition d'un ovale par la relation (22).

---

## SUR LA THÉORIE DE L'ORDRE DES FIGURES RÉELLES ET LES TRAVAUX DE M. HAUPT

PAR

M. LINSMAN (Liège).

---

1. — Dans un très intéressant article « Sur la géométrie finie et les travaux de M. C. Juel » [51]<sup>1</sup>, M. MONTEL a donné un exposé d'ensemble des travaux de ce géomètre et des recherches qu'ils ont suscitées chez d'autres auteurs.

Sans vouloir fixer des limites bien nettes à la géométrie finie, nous pouvons dire qu'elle considère ordinairement ce que JUEL a appelé des figures élémentaires. Celles-ci sont toujours réelles, mais elles atteignent à un grand degré de généralité.

La notion capitale intervenant dans leur définition et dans leur étude est la notion d'ordre.

Considérons un ensemble ponctuel  $E$  plan (ou spatial), et supposons qu'il possède un nombre borné de points sur toute

---

<sup>1</sup> Les nombres en caractères gras renvoient à la bibliographie placée à la fin de cet article.

droite de son plan (ou dans tout plan de l'espace). Le maximum de ce nombre sera dit *l'ordre*, ou plus exactement l'ordre linéaire de E.

Les courbes élémentaires planes sont alors des courbes fermées au sens projectif, admettant en chaque point une tangente variant d'une manière continue avec le point de contact, et qui, en outre, sont la réunion d'un nombre fini d'arcs d'ordre deux, c'est-à-dire d'arcs convexes, placés bout à bout.

Les courbes élémentaires gauches sont des courbes fermées au sens projectif, possèdent en chaque point une tangente et un plan osculateur répartis d'une façon continue et sont la réunion d'un nombre fini d'arcs gauches d'ordre trois placés bout à bout.

Ces courbes apparaissent dans les travaux de JUEL en généralisation des courbes algébriques. Leur ordre est analogue au degré de ces dernières. Toutefois, l'ordre d'une courbe algébrique n'est pas nécessairement égal à son degré: il peut lui être inférieur.

Si la notion d'ordre est indispensable dans l'étude des courbes élémentaires, elle est également appelée à jouer un rôle de toute première importance dans la considération d'ensembles ponctuels plus généraux tels les arcs simples, les arcs de Jordan et même les continus.

Dans ces recherches, il y aura lieu de faire preuve d'esprit critique. On écartera autant que possible toute hypothèse accessoire. L'enchaînement des propriétés qui conduisent à une proposition donnée et le rôle de chaque hypothèse ressortiront alors nettement.

Un des premiers travaux où les hypothèses faites sur l'ordre d'un ensemble apparaissent comme les principales responsables de certaines propriétés de cet ensemble est l'important mémoire de M. MARCHAUD « Sur les continus d'ordre bornés » [44].

Juel avait démontré la proposition suivante:

Toute courbe élémentaire plane d'ordre trois, sans point double et sans point de rebroussement, est la réunion de trois arcs convexes (au sens projectif) [38].

Cette proposition est déjà extrêmement générale quand on compare les courbes élémentaires aux courbes algébriques. Qu'en resterait-il si, à la considération de courbes élémentaires,

on substituait la considération de continus, la seule hypothèse conservée étant celle relative à l'ordre ? La proposition de Juel n'en serait pas foncièrement modifiée. C'est ce que montrent les théorèmes suivants établis par M. Marchaud dans son mémoire :

*Tout continu plan, borné, d'ordre trois, est formé de un ou de deux arcs de Jordan rectifiables. Tout arc d'ordre trois est formé de deux, trois ou quatre arcs d'ordre deux placés bout à bout.*

La condition imposée au continu d'être borné n'a rien d'essentiel. On passerait sans peine à une proposition sur les continus projectifs; le nombre des arcs convexes dont est formé un arc d'ordre trois pourrait peut-être alors s'élever jusqu'à cinq.

On remarquera encore, avec M. Marchaud, que si un continu plan d'ordre trois possède en chaque point une tangente unique, celle-ci varie d'une manière continue avec le point de contact, puisque cette propriété est vraie pour les arcs convexes.

On ne peut, d'autre part, formuler de propositions semblables pour les continus d'ordre quatre [14], [44].

Les recherches de M. Marchaud ont également porté sur les continus gauches. L'orientation que nous voulons donner à cet exposé ne nous permet pas de nous arrêter ici sur ce point.

On constatera cependant, avec M. Marchaud, que certains des résultats auxquels il est amené sont encore valables si, dans la définition de l'ordre, on substitue, à l'ensemble des droites, un système de courbes convenable. C'est ainsi que l'on considérera l'ordre cyclique d'un ensemble (intervenant d'ailleurs déjà dans les recherches de Juel et de MUKHOPADHYAYA), c'est-à-dire le maximum du nombre des points de cet ensemble situés sur une même circonférence, et aussi, avec HJELMSLEV [35], l'ordre par rapport à certains systèmes linéaires de courbes algébriques.

On peut même considérer l'ordre par rapport à un système de courbes simples approprié, ce qui confère à la notion d'ordre un aspect topologique.

Il appartient à M. HAUPT, à qui revient cette dernière idée, d'avoir tracé dans ses grandes lignes une théorie de l'ordre extrêmement générale, et d'en avoir commencé activement l'édifica-

tion<sup>1</sup>. Dans cette théorie, M. Haupt considère également l'ordre d'un ensemble ponctuel plongé dans un espace à plus de deux dimensions. Cette notion s'entendra ici relativement à certains systèmes d'hypersurfaces, par exemple.

2. — Avec M. Haupt [20], essayons d'abord de dégager, relativement aux arcs plans, le véritable caractère de la notion d'ordre.

Soit, dans le plan euclidien, un domaine  $G$ , le domaine fondamental, d'un seul tenant, limité par une courbe simple. Considérons, dans ce domaine, un système  $\mathcal{K}$  de courbes  $K$ , ouvertes ou fermées, répondant aux conditions suivantes:

1° Ce sont des courbes simples, c'est-à-dire qu'elles sont l'image continue et biunivoque d'un segment de droite ou d'une circonférence;

2° Toute courbe  $K$  ouverte a ses deux extrémités situées sur la frontière de  $G$ ; toute courbe  $K$  fermée possède au plus un point en commun avec cette frontière.

Il résulte de cette seconde condition que  $G$  est décomposée par toute courbe  $K$  en deux domaines partiels dont l'un au plus est doublement connexe;

3° Par  $k$  points distincts de  $G$  passe une courbe  $K$  et une seule. Ces points sont évidemment supposés distincts des points-base du système  $\mathcal{K}$ , c'est-à-dire des points communs à toutes les courbes  $K$ ;

4° Toute courbe  $K$  doit varier d'une manière continue avec tout groupe de  $k$  points qui la détermine.

D'une façon plus précise, appelons domaine de rayon  $\eta$  d'un ensemble le domaine obtenu par la réunion de tous les cercles ouverts de rayon  $\eta$  centrés en un point de cet ensemble. La condition de continuité ci-dessus s'énonce alors:

Soit  $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_k$  un groupe de  $k$  points et désignons par  $\bar{K}$  la courbe  $K$  qu'il détermine. A tout nombre  $\eta > 0$  arbitraire-

<sup>1</sup> Les tendances qui semblent animer les recherches de M. HAUPT apparaissent également dans les travaux de MM. MENGER et BOULIGAND. Tout en ayant leur principe propre, celui de Juel convenablement élargi, les recherches de M. Haupt et celles de ces autres auteurs ont ce lien commun: l'aspiration vers la topologie, très nette dans l'œuvre de M. Haupt.

ment donné, on peut alors associer un nombre  $\delta = \delta(\eta; \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_k) > 0$  tel que:

- a) Toute courbe  $K$  qui passe dans les cercles de rayon  $\delta$  et de centre respectif  $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_k$  appartient au domaine de rayon  $\eta$  de  $\bar{K}$ ;
- b) Inversement,  $\bar{K}$  appartient au domaine de rayon  $\eta$  de  $K$ .
- c) Si  $\bar{T}$  est un arc partiel de  $\bar{K}$ , d'extrémités  $\bar{Q}$  et  $\bar{R}$ , il existe, dans les domaines de rayon  $\delta$  de ces points, deux autres points  $Q$  et  $R$  qui sont les extrémités d'un arc partiel  $T$  de  $K$  s'étendant en entier dans le domaine de rayon  $\eta$  de  $\bar{T}$ .

Considérons enfin un arc de Jordan  $B$ , situé dans  $G$ , c'est-à-dire l'image continue et univoque sans plus d'un segment de droite, extrémités comprises.

L'ordre de  $B$  sera, par définition, le maximum du nombre des points communs à  $B$  et à une courbe  $K$  distincts des points-base de  $\mathcal{K}$ . Si ce maximum n'existe pas, mais que toute courbe  $K$  rencontre cependant  $B$  en un nombre fini de points, l'ordre de  $B$  sera dit fini. Dans tous les autres cas,  $B$  sera dit d'ordre infini<sup>1</sup>. Nous supposons d'ailleurs ici, par simple raison de commodité, que  $B$  et une courbe  $K$  quelconque ne possèdent, en commun, aucun arc partiel.

Quelques précisions sont cependant encore nécessaires.

De par sa définition même,  $B$  admet une représentation paramétrique continue de la forme

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Mais un même point de  $B$  peut correspondre à plusieurs valeurs du paramètre  $t$ . Il sera dit posséder la multiplicité  $r$  ou infinie suivant qu'il correspond à  $r$  ou à une infinité de valeurs distinctes de ce paramètre. Dans la détermination de l'ordre de  $B$ , chaque point commun à  $B$  et à une courbe  $K$  peut être compté soit comme un point unique, soit avec sa multiplicité. Suivant le cas, on parlera respectivement de l'ordre faible ou de l'ordre fort de  $B$  [58]. Par la suite, c'est toujours de ce dernier qu'il s'agira.

Nous n'aurons pas à nous occuper dans cet exposé de la

<sup>1</sup> On pourrait préciser davantage et attacher à l'ordre infini une certaine puissance: le maximum de la puissance de l'ensemble des points communs à  $B$  et à une courbe  $K$ . On consultera à ce sujet K. MENGER, *Kurventheorie* (48), pp. 96 et suivantes.

configuration des points multiples, mais il convient de signaler l'important mémoire de M. ROSENTHAL sur cette question [56].

3. — Afin d'éviter toute confusion, nous appellerons point-image tout point  $P$  de  $B$  quand nous voudrions spécifier qu'il correspond à une valeur bien déterminée  $t_0$  du paramètre, et nous le désignerons par  $P(t_0)$ .

On définira le domaine d'un point-image  $P(t_0)$  sur  $B$  comme l'ensemble des points de  $B$  correspondant aux valeurs de  $t$  telles que

$$0 \leq |t - t_0| < \delta$$

où  $\delta$  est un nombre positif arbitraire suffisamment petit.

Les expressions domaine à gauche ou à droite de  $P(t_0)$  sur  $B$  s'entendent d'elles-mêmes.

Enfin, on dira que  $P(t_0)$  est un point-image d'appui ou d'intersection de  $B$  sur une courbe  $K$  si le domaine de  $P(t_0)$  sur  $B$  appartient ou non en entier à l'un des deux domaines déterminés dans  $G$  par la courbe  $K$  considérée.

Comme on le conçoit, l'argument essentiel qui intervient dans la démonstration des propriétés que nous allons énoncer est que toute courbe  $K$  décompose  $G$  en deux domaines partiels, et que tout arc de  $B$  possédant au moins un point dans chacun de ces domaines doit posséder sur  $K$  au moins un point-image d'intersection. On arrive ainsi aisément aux deux propositions suivantes:

*Soit  $S(t)$  un point-image d'intersection de  $B$  sur une courbe  $K$ . A tout domaine arbitrairement petit  $U = U(S; B)$  de  $S(t)$  sur  $B$ , on peut associer un domaine de rayon  $\eta$  de la courbe  $K$  considérée tel que toute autre courbe  $K$  située dans ce domaine possède au moins un point d'intersection avec  $B$  appartenant à  $U$ .*

*Soit  $T(t)$  un point-image d'appui de  $B$  sur une courbe  $K$ . A tout domaine arbitrairement petit  $U = U(T; B)$  de  $T(t)$  sur  $B$ , on peut associer un domaine de rayon  $\eta$  de la courbe  $K$  considérée tel que, dans ce domaine, il existe d'autres courbes  $K$  qui possèdent au moins deux points-image d'intersection avec  $B$  appartenant à  $U$ .*

On exprimera ces deux théorèmes plus simplement en disant

que par variation continue de  $K$ , les points-image d'intersection se conservent, et que les points-image d'appui peuvent se transformer en deux points-image d'intersection.

4. — Supposons maintenant que  $B$  rencontre une certaine courbe  $K$  en  $h$  points-image distincts, qui peuvent d'ailleurs être indifféremment des points-image d'intersection, des points-image d'appui, ou être les deux extrémités de  $B$ . Désignons cette courbe par  $K$ .

Par variation continue de  $K$ , on peut, d'après les théorèmes ci-dessus, transformer un quelconque de ces points-image d'appui en deux points-image d'intersection, mais nous ne savons pas s'il est possible de réaliser ce fait en deux points-image d'appui simultanément. On peut se demander si, par variation continue de  $K$ , on ne pourrait pas obtenir une autre courbe  $K$  ayant avec  $B$  au moins  $h$  points-image d'intersection. La réponse est affirmative et constitue ce que M. Haupt appelle le *théorème de réduction*: *S'il existe une courbe  $K$  ayant, avec  $B$ ,  $h$  points-image en commun, (aucune distinction n'étant d'ailleurs faite entre les points-image d'intersection, d'appui et les extrémités de  $B$ ), il existe alors d'autres courbes  $K$ , arbitrairement voisines de la courbe  $K$  considérée qui rencontrent  $B$  en au moins  $h$  points-image d'intersection. Toutefois  $k$  doit être supposé  $\geq 2$ .*

Dans le cas où  $k = 1$ , le théorème de réduction n'est pas valable en général. Il suffit, pour le voir, de considérer un arc d'ordre cinq par rapport à un faisceau de rayons, dont les deux extrémités sont situées sur un même rayon, et qui possède encore en commun avec ce dernier un point d'appui situé entre deux points d'intersection.

Nous esquisserons rapidement la démonstration du théorème de réduction. Nous nous bornerons d'ailleurs au cas où  $k = 2$ . Dans le cas où  $k$  serait  $\geq 2$ , on pourrait, en effet, toujours extraire de  $\mathcal{K}$  un système de courbes  $K$  contenant  $K$  et pour lequel on aurait  $k = 2$ .

$K$  détermine dans  $G$  deux domaines  $G^+$  et  $G^-$ . Suivant que leur domaine sur  $B$  appartient respectivement à  $G^+$  ou à  $G^-$ , les points-image d'appui de  $B$  sur  $K$  seront dits positifs ou négatifs. Il en sera de même des extrémités de  $B$  situées sur  $K$ .



Soit maintenant  $T$  un arc de  $K$  contenant à son intérieur tout les points-image communs à  $B$  et à cette courbe. Sur  $T$  un point quelconque  $V$  détermine deux autres arcs partiels  $T_g$  et  $T_d$  s'étendant respectivement à gauche et à droite de ce point.

Désignons par  $q_g^+$ ,  $q_g^-$  et  $q_d^+$ ,  $q_d^-$  le nombre des points-image d'appui positifs et négatifs de  $B$  sur  $K$  qu'ils contiennent respectivement. Représentons de même par  $e_g^+$ ,  $e_g^-$  et  $e_d^+$ ,  $e_d^-$  le nombre des extrémités de  $B$  positives et négatives situées respectivement sur ces arcs. Et soit encore  $s$  le nombre total des points-image d'intersection.

On peut alors montrer que, pour une représentation paramétrique appropriée de  $B$ , et pour un choix convenable des expressions gauche et droite, il existe, sur  $T$  et en dehors de  $B$ , une position particulière  $V_0$  de  $V$  telle que

$$2q_g^+ + 2q_d^- + e_g^+ + e_d^- + s \geq h. \quad (1)$$

Soient maintenant  $P_1$  et  $P_2$  deux points de  $K$  situés à gauche de  $V_0$  sur cette courbe,  $P_2$  étant à droite de  $P_1$ , et tels que sur  $K$  n'existent entre  $P_1$  et  $V_0$  aucun point d'appui ni aucune extrémité de  $B$ . Soit encore  $\bar{P}_2$  un point de  $G^-$  appartenant au voisinage de  $P_2$ , et désignons par  $\bar{K}$  la courbe  $K$  passant par les points  $P_1$  et  $\bar{P}_2$ . Puisque  $k = 2$ , cette courbe ne peut rencontrer  $K$  qu'en un seul point, donc en  $P_1$ . Ce point détermine sur  $\bar{K}$  deux arcs situés en entier respectivement dans  $G^+$  et dans  $G^-$ .  $\bar{K}$  peut d'ailleurs, avec  $\bar{P}_2$ , être choisie dans un voisinage arbitrairement petit de  $K$ .

On s'apercevra alors aisément que, lorsqu'on substitue  $\bar{K}$  à  $K$ ,  $q_g^+ + q_d^-$  points-image d'appui de  $B$  sur  $K$  se transforment chacun en au moins deux points-image d'intersection, et que  $e_g^+ + e_d^-$  extrémités de  $B$  situées sur  $K$  se transforment chacune en au moins un point-image d'intersection. De la relation (1) résulte alors le théorème annoncé.

Le théorème de réduction intervient dans la démonstration de nombreuses propriétés. M. Marchaud en avait d'ailleurs déjà reconnu l'utilité et l'avait établi, dans le cas de l'ordre linéaire, directement pour les arcs de l'espace à  $n$  dimensions [44].

5. — Dorénavant, comme nous aurons surtout en vue des théorèmes d'existence, nous nous bornerons parfois à la considération d'arcs simples au sujet desquels nous formulerons d'ailleurs des hypothèses très limitatives. Aucune distinction entre point et point-image ne sera plus alors nécessaire.

Soit donc un arc simple  $B$  tel qu'une certaine courbe  $K$  n'ait avec lui que des points d'intersection  $S_1, \dots, S_\lambda$  en commun, et d'ailleurs au moins  $k + 1$ .

Admettons encore que ces points soient disposés sur  $B$  et sur  $K$  dans le même ordre, c'est-à-dire qu'ils soient rencontrés dans le même ordre quand on parcourt  $B$  et  $K$  dans un sens convenable. Fixons  $k - 1$  de ces points et faisons varier la courbe  $K$  d'une manière continue en imposant à l'un des points  $S$  restants un déplacement monotone sur  $B$ , et d'ailleurs suffisamment restreint.

Il est alors aisé de voir que deux quelconques des points  $S$  mobiles se déplacent dans le même sens ou en sens inverse sur  $B$  suivant que le nombre des autres points  $S$  mobiles qui les séparent est pair ou impair. C'est le *théorème de monotonie* énoncé pour la première fois par MUKHOPADHYAYA [53], et que M. Haupt a d'ailleurs généralisé.

Comme on le verra par la suite les arcs simples auxquels s'appliquent les conclusions du théorème de monotonie présentent un intérêt tout spécial. Nous les désignerons par  $B^*$ . De tels arcs existent certainement, si nous acceptons toutefois de nous limiter à la considération d'arcs soumis à des hypothèses convenables; nous en rencontrerons des exemples.

6. — Considérons un arc  $B^*$  d'ordre fini, et soit  $K$  une courbe  $K$  qui le rencontre en  $k + 1$  points d'intersection au moins. Prélevons parmi ceux-ci un groupe de  $k + 1$  points que nous désignerons par  $S_1, \dots, S_{k+1}$  et que nous supposerons distribués sur  $B$  dans l'ordre de leurs indices.

Supposons que par un moyen quelconque nous puissions trouver une autre courbe  $K$  rencontrant  $B$  en certains points dont  $k + 1$  au moins, que nous désignerons par  $S'$ , sont des points d'intersection appartenant à l'arc  $S_1 S_{k+1}$  de  $B^*$ . Nous dirons que le groupe des points  $S'$  peut s'obtenir par une contrac-

tion du groupe  $S_1, \dots, S_{k+1}$ . On introduit d'une manière analogue la notion d'expansion d'un groupe de points: on dira que l'on a effectué une expansion du groupe  $S_1, \dots, S_{k+1}$  si l'on peut trouver un groupe de  $k + 1$  points d'intersection  $S_1'', \dots, S_{k+1}''$  de  $B^*$  avec une autre courbe  $K$  tels que les points  $S$  appartiennent tous à l'arc  $S_1''S_{k+1}''$  de  $B^*$ .

Puisque l'arc  $B^*$  satisfait aux conclusions du théorème de monotonie, on peut toujours par variation continue de  $K$  dans un sens convenable, rapprocher deux quelconques des points  $S$  l'un de l'autre. Est-il possible de trouver une courbe  $K$  rencontrant  $B^*$  en  $k + 1$  points au moins condensés dans un intervalle aussi restreint que l'on voudra et situés d'ailleurs entre  $S_1$  et  $S_{k+1}$  ?

Nous nous bornerons à énoncer, sans démonstration, le *théorème de contraction* qui répond à cette question:

*Soit  $B^*$  un arc simple auquel s'appliquent les conclusions du théorème de monotonie. A partir d'un groupe de  $k + 1$  points d'intersection de  $B^*$  avec une courbe  $K$ , on peut toujours, par une suite de contractions convenables, en engendrer un autre situé sur un intervalle de  $B^*$  arbitrairement petit.*

Nous sommes ainsi amené à introduire encore une notion nouvelle qui est une des bases de la théorie de M. Haupt: *l'ordre d'un point*.

Considérons, sur un arc de Jordan  $B$ , un point-image  $P(t_0)$ . Nous dirons que  $P(t_0)$  est d'ordre  $n$ , d'ordre fini ou d'ordre infini suivant que tous les voisinages suffisamment restreints de  $P(t_0)$  sur  $B$  sont respectivement de ces ordres. Il s'agit ici de voisinages bilatéraux. Si, dans cette définition, on considère, au contraire, des voisinages latéraux (à gauche ou à droite), on obtient la notion d'ordre latéral (à gauche ou à droite) d'un point-image.

Exprimé dans ce nouveau langage, le théorème de contraction nous fournit un premier théorème d'existence, à savoir l'existence d'au moins un point d'ordre  $k + 1$  sur tout arc  $B^*$  d'ordre au moins égal à  $k + 1$ .

Un autre théorème qui constitue comme une réciproque au théorème de contraction est le suivant:

*Soit  $B^*$  un arc d'ordre  $k + 1$  auquel s'appliquent les conclusions du théorème de monotonie. Soient  $\Gamma'$  et  $\Gamma''$  deux groupes de*

$k + 1$  points de  $B^*$  situés respectivement sur une même courbe  $K$ , un point quelconque de  $\Gamma'$  se trouvant, sur  $B^*$ , à gauche d'un point quelconque de  $\Gamma''$ . Soit encore  $\overline{B^*}$  un arc partiel de  $B^*$  contenant à son intérieur les deux groupes  $\Gamma'$  et  $\Gamma''$ . Si  $P$  est un point situé à gauche (ou à droite) de  $\overline{B^*}$  sur  $B^*$ , on peut alors par une suite d'expansions convenables transformer  $\Gamma'$  (ou  $\Gamma''$ ) en un groupe de  $k + 1$  points constitué par  $P$  et par  $k$  points intérieurs à  $\overline{B^*}$ .

Signalons enfin que ce théorème d'expansion conduit à un second théorème d'existence :

Soit  $B^*$  un arc répondant aux conditions du théorème d'expansion,  $S'$  et  $S''$  deux points d'ordre  $k + 1$  de cet arc. Soit  $P$  un point de  $B^*$  situé en dehors de l'arc  $S' S''$ . Il existe alors sur cet arc un point d'ordre  $k$  par rapport au système des courbes  $K$  passant par  $P$ . Le théorème de contraction et les considérations développées dans la démonstration du théorème d'expansion sont d'une importance capitale pour l'étude des arcs et des courbes réels. Ces deux propositions expriment des propriétés abstraites et concernent, en réalité, des correspondances ponctuelles monotones sur un segment paramétrique. Nous aurons l'occasion d'en reparler par la suite.

7. — Revenons maintenant à la considération d'arcs de Jordan absolument généraux. Nous savons la complexité qu'ils peuvent présenter.

Un des problèmes les plus importants auquel la notion d'ordre apporte une solution adéquate est le *problème de la structure*. Il consiste à rechercher des modèles simples au moyen desquels on pourra toujours reconstituer un arc quelconque. Nous allons voir que ces modèles sont ce que M. Haupt a appelé des arcs primitifs (ou [69] total ordnungshomogen), c'est-à-dire des arcs dont tous les points possèdent le même ordre et qui en outre possèdent eux-mêmes cet ordre. Il est encore équivalent de dire qu'un arc primitif est un arc dont tous les arcs partiels possèdent le même ordre.

Supposons, en effet, adopté un certain type d'ordre, déterminé par un système de courbes  $K$ . Nous pouvons alors énoncer le *théorème (approfondi) de répartition* — *verschärfter Verteilungs-*

satz, dit aussi *théorème général de décomposition* : *Tout arc de Jordan est formé d'un ensemble dénombrable d'arcs primitifs, d'arcs de courbe K et de leurs points d'accumulation.*

Cette proposition, établie par M. Haupt, pour la première fois à l'occasion de l'ordre linéaire [16], constitue un théorème formel plutôt qu'un théorème de géométrie. Par un simple changement de vocabulaire, on peut l'étendre aux ensembles ponctuels topologiques, réguliers, avec base dénombrable, pour lesquels on a défini une certaine notion d'ordre [69].

Vu l'importance de ce théorème, nous allons en exposer une démonstration. Au préalable, il sera utile de faire les quelques remarques suivantes :

a) Soit B l'arc de Jordan considéré. Il ne peut contenir qu'un ensemble dénombrable d'arcs de courbe K n'ayant aucun point en commun, sauf peut-être des extrémités. Les points de B non intérieurs à ces arcs se répartissent sur un ensemble dénombrable d'arcs de Jordan. Il suffira donc de démontrer le théorème de décomposition pour ces derniers. Autrement dit, nous pourrions supposer que B ne contient pas d'arc de courbe K.

b) Tout arc de Jordan d'ordre  $k$  est primitif : il ne peut, en effet, contenir d'arc partiel d'ordre supérieur à  $k$  et, d'autre part, un arc quelconque est au moins d'ordre  $k$  puisque par  $k$  de ses points passe toujours une courbe K.

c) La condition nécessaire et suffisante pour qu'un arc de Jordan soit la réunion d'un nombre fini d'arcs d'ordre  $\leq n$  est qu'il ne contienne aucun point-image d'ordre latéral  $> n$ . C'est là une conséquence immédiate du lemme de Borel-Lebesgue.

En particulier, un arc dont tous les points-image sont d'ordre  $n$  est formé d'un nombre fini d'arcs primitifs d'ordre  $n$ .

On peut voir également qu'un arc de Jordan ne contenant que des points d'ordre borné est la réunion d'un nombre fini d'arcs d'ordre borné.

d) La condition nécessaire et suffisante pour qu'un arc soit tout au plus d'ordre fini est qu'il ne contienne aucun point d'ordre infini. La condition, évidemment nécessaire, est aussi suffisante. Supposons, en effet, l'arc considéré d'ordre infini. Il existe alors une droite le rencontrant en une infinité de points-image. Les valeurs du paramètre correspondant à ces derniers

admettent un point d'accumulation. Le point-image qui y correspond est d'ordre infini.

e) L'ensemble des points-image de  $B$  d'ordre  $\geq n$  est fermé; il en est de même de l'ensemble des points-image d'ordre au moins fini et de celui des points-image d'ordre infini. Cela résulte de la définition même de l'ordre d'un point-image.

On en conclut que si l'ensemble des points-image d'ordre  $\geq n$  (ou au moins fini, ou infini) est partout dense sur  $B$ , tout point-image de cet arc est au moins d'ordre  $n$  (ou fini, ou infini).

f) L'ensemble des points-image d'ordre  $< n$  est formé d'un ensemble dénombrable d'arcs de Jordan et même, d'après c), d'arcs de Jordan d'ordre  $< n$ .

Si, en outre, l'ensemble des points-image d'ordre  $\geq n$  n'est nulle part dense sur  $B$  (c'est-à-dire s'il n'existe aucun arc de  $B$  sur lequel ces points-image soient partout denses), l'ensemble des points-image d'ordre  $< n$  est alors partout dense sur  $B$  et celui-ci est la fermeture d'un ensemble dénombrable d'arcs d'ordre inférieur à  $n$ .

Cette dernière remarque se prolonge au cas où seulement les points d'ordre au moins fini et au cas où les points d'ordre infini ne forment qu'un ensemble nulle part dense sur  $B$ .

La démonstration du théorème de décomposition se fera par récurrence.

Remarquons d'abord que ce théorème est exact dans le cas où les points-image d'ordre  $> k$  ne sont nulle part denses sur  $B$ . En effet, d'après f),  $B$  est alors la fermeture d'un ensemble dénombrable d'arcs d'ordre  $k$  et nous avons vu que ceux-ci étaient des arcs primitifs.

Nous allons maintenant démontrer que si le théorème est vrai quand les points-image d'ordre  $\geq n$  ne forment qu'un ensemble nulle part dense sur  $B$ , il l'est encore quand ce fait ne se produit que pour les points-image d'ordre  $\geq n + 1$ .

Dans ce dernier cas,  $B$  est, en vertu de f), la fermeture d'un ensemble dénombrable d'arcs  $T_v$  d'ordre  $\leq n$ . Il nous suffira donc de démontrer l'exactitude du théorème pour ces arcs. Celle-ci serait assurée par hypothèse si sur  $T_v$  l'ensemble des points-image d'ordre  $n$  n'était nulle part dense. Il nous reste donc finalement à considérer le cas où sur  $T_v$  existe au moins un

arc partiel  $T'_\nu$  sur lequel les points-image d'ordre  $n$  forment un ensemble partout dense. Appelons  $O_\nu$  l'ensemble de tous les arcs  $T'_\nu$ . On peut toujours le considérer comme la réunion d'un ensemble dénombrable d'arcs  $T'_{\nu\rho}$  n'ayant tout au plus en commun que des extrémités. De ce qu'un arc  $T'_{\nu\rho}$  est d'ordre  $n$  et de  $e$ ) résulte alors que tout point-image de cet arc est d'ordre  $n$ .  $T'_{\nu\rho}$ , et par suite,  $O_\nu$  sont donc, d'après  $c$ ), formés d'arcs primitifs d'ordre  $n$ .

Considérons maintenant l'ensemble ouvert  $R_\nu = T_\nu - \overline{O_\nu}$ , où  $\overline{O_\nu}$  représente la fermeture de  $O_\nu$ . Il est formé d'un ensemble dénombrable d'arcs sur lesquels les points-image d'ordre  $n$  ne forment qu'un ensemble nulle part dense. Par hypothèse le théorème de décomposition est applicable à chacun d'eux.

Il résulte de tout ce qui précède que le théorème de décomposition est exact quand les points d'ordre  $> n$  ne forment qu'un ensemble nulle part dense sur  $B$ .

On reprendra ces raisonnements dans le cas où seulement les points-image d'ordre au moins fini, puis d'ordre infini ne forment qu'un ensemble nulle part dense sur  $B$ , et on considérera enfin un arc de Jordan absolument quelconque. On arrivera ainsi au théorème de décomposition dans toute sa généralité.

8. — Le problème de la structure revient donc à celui de l'existence des arcs primitifs. Cette question a été résolue dans le cas de l'ordre linéaire [16]:

*Il ne peut exister d'arc primitif relativement à l'ordre linéaire autre que les arcs primitifs d'ordre deux et les arcs primitifs d'ordre infini, abstraction faite des segments de droite.*

Les premiers sont évidemment bien connus, ce sont les arcs convexes. Les seconds existent certainement; les arcs représentés par des équations de la forme  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  où  $\varphi$  et  $\psi$  n'admettent de dérivée nulle part en fournissent des exemples.

Ainsi les arcs convexes, les arcs d'ordre linéaire infini et les segments de droite suffisent pour reconstituer un arc de Jordan quelconque. En particulier, tout arc de Jordan d'ordre fini ne contenant pas de segment de droite est formé d'un

ensemble au plus dénombrable d'arcs convexes et de leurs points d'accumulation.

Ces derniers résultats avaient déjà été établis pour certains arcs simples par J. HJELMSLEV [34], et M. ROSENTHAL en avait donné une première généralisation [56].

Soulignons encore la grande généralité des courbes élémentaires considérées par Juel puisque, à part la condition d'existence d'une tangente unique en chaque point, on ne leur impose que la condition d'être formée d'un nombre fini d'arcs convexes.

M. Haupt a également réalisé la recherche des arcs primitifs dans le cas de l'ordre cyclique [29], [70]. La méthode qu'il utilise semble suffisante pour résoudre le cas  $k = 3$  et peut-être aussi le problème de la structure des arcs plans en toute généralité, c'est-à-dire pour  $k$  arbitraire, certaines restrictions étant toutefois éventuellement imposées aux courbes  $K$ . En tous cas, il n'existe pas d'arc primitif d'ordre  $k + 1$  auquel s'appliquent les conclusions du théorème de monotonie. Ceci découle immédiatement d'un autre théorème :

*Tout arc  $B^*$ , d'ordre  $k + 1$  auquel s'appliquent les conclusions du théorème de monotonie contient au maximum  $s_k = 3 \cdot 2^{k-1} - 1$  points d'ordre  $k + 1$ , dont aucun n'est d'ailleurs d'ordre latéral  $k + 1$ . On peut voir, en effet, en se basant sur le théorème de contraction, qu'un point d'ordre latéral  $k + 1$  est nécessairement point d'accumulation de points d'ordre  $k + 1$ .*

On conclut encore de là que  $B^*$  peut être considéré comme la réunion d'un nombre fini d'arcs d'ordre  $k$  n'excédant pas  $3 \cdot 2^{k-1}$ .

Rien ne nous permet d'affirmer que cette borne ne puisse encore être réduite.

9. — La notion d'ordre peut servir de principe de classification, de même qu'on classe les courbes algébriques d'après leur degré. Mais la classification, ici, sera plus souple. On classera les courbes d'après leur ordre linéaire, d'après leur ordre cyclique, ou on considérera simultanément ces différents ordres [37].

Ceux-ci ne sont d'ailleurs pas totalement indépendants. Les ovales (courbes fermées d'ordre linéaire deux) possèdent des propriétés intéressantes quant à leur ordre cyclique. Rappelons



à ce sujet la proposition de Mukhopadhyaya suivant laquelle tout ovale, soumis à des conditions de différentiabilité suffisantes, possède au moins quatre points cycliques (points d'ordre cyclique quatre) [53].

L'ordre par rapport à un faisceau est particulièrement utile à considérer. Tout arc d'ordre un par rapport à un faisceau est, en effet, un arc simple; et cela permet d'obtenir des renseignements sur la décomposition de certains arcs de Jordan en arcs simples. Nous citerons, par exemple, la proposition suivante de M. Haupt, qu'il a d'ailleurs généralisée [13]:

Tout arc de Jordan d'ordre linéaire  $n \leq 5$  est décomposable en un nombre fini d'arcs simples relativement à des faisceaux de rayons appropriés. D'autre part, il existe, pour tout  $n \geq 6$ , des arcs d'ordre  $n$  qui n'admettent pas une telle décomposition [12].

10. — Il nous reste encore, avant de terminer cet exposé rapide de la théorie de l'ordre des figures planes, à parler d'un nouveau type d'ordre qui a été introduit récemment dans l'étude des courbes par M. BLASCHKE [1]: l'ordre cinématique.

Considérons un arc de Jordan  $B$ . L'ordre cinématique de  $B$  est le maximum du nombre des points d'intersection de  $B$  avec tout autre arc qui lui est identique à un déplacement près. Lorsqu'on limite ces déplacements à des translations, on obtient l'ordre de translation de  $B$ .

Les circonférences sont les seules courbes fermées d'ordre cinématique deux. Les courbes fermées d'ordre cinématique quatre sont les ovales à centre possédant quatre points cycliques [3], [10].

L'ordre de translation et l'ordre linéaire ont certaines relations entre eux. M. Rosenthal, dans un travail récent [58], a établi à ce sujet diverses propositions dont nous signalerons celle-ci: Tout arc d'ordre de translation borné est d'ordre linéaire borné. Il a montré que les ovales sont les seules courbes de Jordan fermées d'ordre de translation deux, que les arcs convexes ne possédant pas deux tangentes parallèles sont les seuls arcs de Jordan d'ordre de translation un.

Il est également parvenu à des propriétés générales, notam-

ment en ce qui concerne les arcs d'ordre de translation borné, quant à leur structure et à leur rectificabilité.

11. — Remarquons, en passant, que la théorie de la structure conduit à des *problèmes de configuration (Gestaltsprobleme)* [33]. Ces derniers traitent des propriétés globales des courbes en opposition avec le problème de la structure qui en recherche les propriétés locales. Ils consistent au fond à répartir les courbes en différentes classes, celles-ci étant définies essentiellement au moyen du concept d'un ordre donné. Les courbes d'une même classe sont dites équivalentes, ou posséder la même configuration.

Dans ces problèmes rentrent les problèmes du type classique de Juel (voir entre autres les travaux de MM. BRUSÓTTI, JUEL, LINSMAN, J. v. SZ. NAGY, SCHERK, SEGRE; cf. MONTEL [51] et notre bibliographie).

Mais nous ne pouvons insister davantage ici sur les nombreux travaux qui entrent en ligne de compte.

12. — Nous nous sommes limités jusqu'à présent à la considération d'arcs plans. Mais l'on peut définir l'ordre d'un arc gauche, d'une surface, ou plus généralement d'une *variété dans un espace à  $n$  dimensions* [32], [71].

L'ordre d'un *arc gauche* de Jordan, représenté par les équations paramétriques  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $z = \chi(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , est, par définition, le maximum du nombre des points-image de cet arc situé sur les surfaces d'un système approprié.

Jusqu'à présent, seuls l'ordre linéaire (par rapport aux plans) et l'ordre sphérique (par rapport aux sphères de l'espace) ont été considérés.

La définition de l'ordre d'un point-image et la définition des arcs primitifs sont les mêmes que pour les arcs plans. Le problème de la structure des arcs gauches est partiellement résolu dans le cas de l'ordre linéaire. D'une part, le *verschärfte Verteilungssatz*, comme nous l'avons d'ailleurs remarqué, s'applique aux arcs gauches. D'autre part, on peut encore démontrer, avec M. HAUPT, que tout arc de Jordan tel que les fonctions  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\chi$  de la représentation paramétrique admettent des dérivées

continues jusqu'au troisième ordre est localement d'ordre linéaire trois [19]. On est ainsi porté à croire que, par analogie avec les résultats obtenus pour les arcs plans, les arcs gauches d'ordre trois sont les seuls arcs primitifs gauches d'ordre fini (cf. n° 8).

Ce sont ces arcs qui, sous l'hypothèse d'existence d'une tangente et d'un plan osculateur uniques en chaque point, constituent les arcs élémentaires avec lesquels Juel a construit les courbes élémentaires gauches. Remarquons, en effet, que cette hypothèse suffit à entraîner la variation continue de la tangente et du plan osculateur avec le point de contact [35], [44].

On trouvera, dans un travail de M<sup>lle</sup> SAUTER, une étude approfondie des arcs de l'espace à  $n$  dimensions [35], [48]. L'ordre linéaire est ici défini par rapport aux hyperplans de cet espace.

13. — Il apparaît que la théorie de l'ordre des arcs plans développée dans toute sa généralité serait susceptible d'apporter une simplification considérable dans l'étude des arcs gauches. C'est ce que l'on comprendra par l'exemple suivant qui constitue une des plus belles applications [21] que M. Haupt ait donné de sa théorie de l'ordre.

Nous avons rappelé, au début de cet exposé, la proposition suivant laquelle tout continu plan d'ordre linéaire trois pouvait être considéré comme la réunion d'au maximum cinq arcs convexes. Cette proposition s'étend aux arcs gauches d'ordre (linéaire) quatre.

Considérons, en effet, un arc gauche  $C_4$  d'ordre quatre, et soit  $P$  un point ordinaire intérieur à cet arc. Projetons  $C_4$  de  $P$  sur un plan  $\omega$  ne passant pas par ce point: nous obtenons un arc plan d'ordre trois et qui peut ainsi être considéré comme la réunion d'au maximum cinq arcs convexes.

Nous pouvons donc décomposer  $C_4$  en, au maximum, six arcs partiels  $B_i$  dont aucun ne possède  $P$  comme point intérieur et qui se projettent tous à partir de  $P$  sur  $\omega$  suivant des arcs convexes. Désignons par  $M_i$  la portion de cône convexe de sommet  $P$  et projetant  $B_i$ .

Les plans de l'espace ne passant pas par  $P$  découpent sur  $M_i$

des courbes que nous appellerons  $K$ . Par trois points de  $M_i$  passe un seul plan, donc une seule courbe  $K$ .

Un plan, et par suite une courbe  $K$ , ne peuvent rencontrer  $B_i$  qu'en trois ou tout au plus quatre points; nous pourrions donc dire que  $B_i$  est d'ordre trois ou quatre par rapport au système des courbes  $K$ . Dans ce qui suit, nous parlerons indifféremment de l'ordre de  $B_i$  par rapport aux courbes  $K$  ou de son ordre linéaire puisque ces nombres sont égaux.

Les courbes  $K$  sont simples relativement aux génératrices de  $M_i$ , c'est-à-dire que toute génératrice de  $M_i$  ne peut les rencontrer qu'en un point au plus. On peut voir qu'il en est de même pour  $B_i$ .

Il en résulte que les points communs à  $B_i$  et à une courbe  $K$  sont disposés dans le même ordre sur  $B_i$  et sur cette courbe  $K$ .

Comme  $M_i$  est topologiquement équivalent à un domaine plan, le théorème de monotonie et toutes les conséquences qu'il entraîne peuvent être répétées au sujet de l'arc  $B_i$ . Le premier théorème d'existence, en particulier, nous permet d'affirmer que si  $B_i$  est d'ordre quatre, il contient au moins un point intérieur d'ordre quatre. Nous allons voir qu'il ne peut d'ailleurs en posséder qu'un seul.

Supposons, en effet, que, sur  $B_i$ , existent deux points  $S'$  et  $S''$  d'ordre quatre, et admettons que, lorsqu'on parcourt  $C_4$  de la gauche vers la droite, on rencontre  $P$ ,  $S'$  et  $S''$  dans cet ordre. On peut alors trouver sur  $B_i$  deux groupes de quatre points coplanaires  $\Gamma' = (T'_1, T'_2, T'_3, T'_4)$  et  $\Gamma'' = (T''_1, T''_2, T''_3, T''_4)$  suffisamment voisins de  $S'$  et de  $S''$  pour que tout point  $T'$  soit à gauche de tout point  $T''$  et à droite de  $P$ . Supposons encore les points  $T'$  et  $T''$  disposés de la gauche vers la droite dans l'ordre de leurs indices. On peut voir aisément que les points  $T'$  et  $T''$  sont tous des points d'intersection de  $C_4$  respectivement avec les plans de  $\Gamma'$  et de  $\Gamma''$ .

Si, sur  $B_i$ , nous déplaçons d'une façon monotone les points  $T'_2, T'_3$  et  $T'_4$  vers la droite jusqu'à les amener en coïncidence avec  $T''_1, T''_2$  et  $T''_3$ , le quatrième point d'intersection de leur plan avec  $C_4$  se déplacera, en vertu du théorème de monotonie, de la droite vers la gauche tant qu'il appartiendra à l'arc  $B_i$ . Il ne peut se perdre en un point intérieur à  $C_4$ . Il doit finalement

arriver en  $T_4'$ . Il devra donc passer par P. Mais alors par ce point passerait un plan rencontrant  $B_i$  en trois points intérieurs, ce qui est impossible, puisque  $M_i$  est convexe.

Il en résulte que si  $B_i$  est d'ordre quatre, il contient un et un seul point d'ordre quatre. D'après un théorème précédent, il ne peut contenir de point d'ordre latéral quatre.

On en conclut qu'un arc  $B_i$  est formé d'au maximum deux arcs d'ordre trois et que par suite  $C_4$  est formé d'au maximum douze arcs d'ordre trois.

Cette proposition s'étend par récurrence aux arcs et aux courbes d'ordre  $n + 1$  de l'espace à  $n$  dimensions :

*Toute courbe ouverte ou fermée d'ordre  $n + 1$  de l'espace à  $n$  dimensions peut toujours être décomposée en un nombre fini d'arcs d'ordre  $n$  n'excédant pas  $s_n = 2(7 \cdot 2^{n-3} - 1)$  ( $n \geq 3$ ).*

Cette borne peut d'ailleurs être abaissée. Poursuivant l'analyse précédente, et utilisant certains résultats de M. DENK sur l'ordre d'un point commun à deux arcs d'ordre  $n$  dans l'espace à  $n$  dimensions [9], nous avons montré que  $s_n$  pouvait être abaissée jusqu'à la valeur  $n + 2$  pour les courbes ouvertes,  $n + 1$  pour les courbes fermées, et que ce nombre ne pouvait être réduit davantage [43]. Nous avons toutefois supposé, pour les courbes considérées, l'existence d'une tangente et d'un plan osculateur unique, tout au moins en certains points. De nouveaux résultats de M. DENK, encore inédits, permettraient peut-être de s'affranchir de cette restriction.

On trouvera dans les travaux de MM. MOHRMANN, SCHERK et SEGRE des renseignements détaillés sur certaines courbes fermées d'ordre quatre de l'espace ordinaire [50], [61], [62].

14. — L'étude des arcs et des courbes gauches pourrait peut-être cependant être abordée d'une façon autonome. Nous ne pouvons ici nous attarder sur ce point; on trouvera des renseignements précieux dans un travail fondamental de M. Hjelmslev sur la théorie des suites monotones [35].

Nous observerons encore que la structure des arcs gauches d'ordre linéaire trois peut être étudiée par la considération de leur ordre sphérique. M. Haupt a montré à ce sujet que tout

arc d'ordre linéaire trois et d'ordre sphérique cinq est la réunion d'un nombre fini d'arcs d'ordre sphérique quatre [17].

Nous dirons enfin quelques mots du *problème du prolongement*. Il consiste à rechercher dans quelles conditions un arc plan ou gauche est prolongeable jusqu'en un autre arc de même ordre qui le contienne et, en particulier, jusqu'en une courbe fermée.

Ce problème, dont la solution est immédiate pour les arcs plans d'ordre linéaire deux, était utile à résoudre pour les arcs gauches d'ordre trois car la possibilité du prolongement de ces arcs intervient comme hypothèse dans certaines recherches [37]. M. Haupt a démontré que tout arc gauche d'ordre linéaire trois tel que le plan osculateur en l'une des extrémités ne passe pas par l'autre extrémité, et tel que les tangentes en ces points ne soient pas coplanaires, est prolongeable jusqu'en une courbe fermée d'ordre trois [26] (bien entendu, en n'additionnant pas simplement un segment de droite); pour les arcs de l'espace à  $n$  dimensions cf. [60]. Il a également donné des conditions pour la possibilité du prolongement des arcs plans d'ordre quelconque [25] (cf. les remarques de M. Hjelmlev [36]).

15. — Peu de recherches ont été faites quant à l'étude des surfaces. Il faudrait d'ailleurs tout d'abord s'entendre sur une définition précise des ensembles ponctuels que l'on conviendra de désigner ainsi, et cette question n'est pas sans difficultés [71].

L'ordre linéaire d'une surface sera ici le maximum du nombre des points de la surface situés sur une droite quelconque de l'espace. On pourra toutefois convenir de ne pas considérer les droites dont un segment appartiendrait à la surface et pour lesquelles l'ordre de celle-ci serait infini.

Quels sont les modèles simples au moyen desquels on pourra toujours reconstituer une surface quelconque? Si l'on exclut les surfaces réglées, pour lesquelles il y aura lieu de faire une étude séparée, il est permis de croire que ce sont les éléments de surface primitifs d'ordre deux, trois et infini [19], [29], [32]. Un élément de surface sera dit primitif d'ordre  $n$  ou infini s'il possède cet ordre ainsi que tout autre élément de surface qu'il contient. Le *verschärfte Verteilungssatz*, en tout cas, peut encore s'énoncer à l'occasion des surfaces.

Le mémoire le plus justement célèbre sur la théorie des surfaces est certainement le mémoire de Juel sur les surfaces élémentaires non réglées du troisième ordre. Une surface élémentaire est une surface possédant en chaque point un plan tangent variant d'une manière continue avec le point de contact, et telle que toute section plane et tout contour apparent soient des courbes élémentaires.

JUEL a démontré que, en général, toute surface élémentaire non réglée et d'ordre trois contient 3, 7, 15 ou 27 droites [39]. Il existe d'ailleurs des surfaces d'ordre trois, distinctes des surfaces algébriques du troisième degré et contenant 27 droites réelles [2], [49].

Mais le mémoire de Juel, outre que les surfaces considérées y sont soumises à certaines hypothèses restrictives, est encore imprécis sur certains points, ne fût-ce que dans la définition même de la notion de surface. On trouvera des premières recherches sur ce dernier point dans la thèse de M. HAALMEYER [11] et dans deux notes de M. Marchaud [46], [47]; voir aussi certaines remarques intéressantes de M. HJELMSLEV [36].

La profonde analogie que nous venons de constater entre les surfaces du troisième ordre et les surfaces du troisième degré s'observe encore à l'occasion des surfaces réglées. Les surfaces réglées du troisième ordre, comme celles du troisième degré, se répartissent en deux catégories suivant qu'elles possèdent deux droites directrices gauches distinctes ou infiniment voisines [42].

Nous ne nous attarderons pas davantage à la considération des surfaces; nous nous écarterions rapidement du but que nous nous sommes imposé.

Nous estimerions ce but atteint si nous avons fait ressortir suffisamment la véritable nature de l'ordre et son rôle dans l'étude des figures réelles.

Des recherches, probablement délicates, devront encore être poursuivies au sujet des courbes et surtout des surfaces. L'état actuel de la théorie de l'ordre, grâce aux travaux de M. Haupt, permet d'espérer, dans cette direction, des résultats aussi nombreux qu'importants.

BIBLIOGRAPHIE <sup>1</sup>

- [1] BLASCHKE, W. Vorlesungen über Integralgeometrie, 1<sup>re</sup> partie (*Hamburger Mathematische Einzelschriften*, t. 20, 1935, 2<sup>me</sup> édition en 1936).
- [2] BLOCH, A. Sur les surfaces élémentaires du troisième ordre de la géométrie finie (*Boletín matemático*, août 1931, n° 6, Buenos-Aires).
- [3] BOL, G. Zur kinematische Ordnung ebener Jordankurven (*Abhandlungen Math. Seminar Hamburg Univ.*, t. 11, 1936, pp. 394-403).
- [4] BRUSSOTI, L. *Sui fasci di curve grafiche* (Pavia, 1919).
- [5] — Le curve gobbe algebriche reali come modelli nella topologia proiettiva dell'allacciamento (*Atti d. Congr. intern. d. matematici, Bologna*, 1928, t. 4, pp. 139-145).
- [6] — Sulle copie di circuiti allacciati e sui loro modelli algebrici (*Mem. d. R. Acc. Nazion. d. Lincei*, cl. sc. fis., mat. e nat., s. 6, t. 3, 1928, pp. 18-76).
- [7] — Sul genere dei modelli algebrici di un sistema spaziale di  $k$  circuiti (*Ann. d. R. Scuola Norm. Sup. Pisa*, s. 2, t. 1, 1932, pp. 61-78).
- [8] — Sui poligoni del piano proiettivo aventi circolazione massima (*Rend. R. Ist. Lomb.*, t. 66, 1933, pp. 69-76).
- [9] DENK, F. Über elementare Punkte höherer Ordnung auf Kurven im  $R_n$  (*Sitzungsber. d. Phys.-med. Soz. zu Erlangen*, t. 67, 1935, pp. 1-3).
- [10] FUJIWARA, M. Ein Satz über konvexe geschlossene Kurven (*Sciences Reports Tôhoku Univ.*, s. 1, t. 9, 1920, pp. 289-294).
- [11] HAALMEYER. Bydragen tot die theorie der elementairoppervlakken (*Thèse*, Amsterdam, 1917).
- [12] HAUPT, O. Über Kurven endlicher Ordnung (*Math. Zeitschr.*, t. 19, 1924, pp. 284-299).
- [13] — Über zerlegbare Kurven (*Math. Zeitschr.*, t. 22, 1925, pp. 8-15).
- [14] — Zur Juelschen Theorie der reellen, ebenen Kurven 4. Ordnung (*Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss.*, München, math.-naturw. Abt., 1925, 1-8).
- [15] — Über Kontinua von beschränkter Ordnung (*Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss.*, München, math.-naturw. Abt., 1931, pp. 49-61).
- [16] — Über die Struktur reeller Kurven (*Journ. de Crelle*, t. 164, 1931, pp. 50-60).
- [17] — Über die Struktur gewisser abgeschlossener Mengen (*Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss.*, München, math.-naturw. Abt., 1932, pp. 71-78).
- [18] — Über Kontinua von endlicher Relativordnung (*Journ. de Crelle*, t. 167, 1932, pp. 20-39).

<sup>1</sup> On complétera utilement cette bibliographie par celle qui termine l'article de M. Montel [51]. Nous nous sommes, d'autre part, borné à ne citer parmi les travaux de Brussoti que quelques-uns des plus importants. Enfin, signalons encore des travaux récents de MM. BOSE, FABRICIUS et ROY parus dans les *Math. Zeitschr.*, le *Journ. Indian Math. Soc.*, le *Bull. Calcutta Math. Soc.* et les *Mat. Tidsskr.*



- [19] HAUPT, O. Zur Differentialgeometrie der Kurven und Flächen (*Journ. de Crelle*, t. 169, 1933, pp. 177-185).
- [20] — Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven in der Ebene bezüglich vorgegebener Kurvenscharen (*Monatsh. f. Math. u. Phys.*, t. 40, 1933, pp. 1-53).
- [21] — Eine Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung, und seine Verallgemeinerung (*Math. Annalen*, t. 108, 1933, pp. 126-142).
- [22] — Über Raumbogen dritter Ordnung, welche die sphärische Ordnung fünf besitzen (*Math. Zeitschr.*, t. 37, 1933, pp. 589-593).
- [23] — Über  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten im  $R_n$  (*Sitzungsber. d. Phys.-med. Soz. zu Erlangen*, t. 65, 1934, pp. 95-96).
- [24] — Verallgemeinerung eines Satzes der Herren Juel und Stenfors (*Sitzungsber. d. Phys.-med. Soz. zu Erlangen*, t. 65, 1934, pp. 279-282).
- [25] — Ordnungsfeste Erweiterung ebener Bogen und Kurven (*Math. Zeitschr.*, t. 39, 1935, pp. 126-136, 777).
- [26] — Über die Erweiterung eines beliebigen Bogens dritter Ordnung, insbesondere zu einer Raumkurve dritter Ordnung (*Journ. de Crelle*, t. 170, 1934, pp. 154-167).
- [27] — Über ordnungsfeste Annäherung ebener Bogen (*Sitzungsber. Heidelberg. Akad. Wiss.*, 1934, pp. 1-22).
- [28] — Über die gewöhnlich-differenzierbaren Punkte der Bogen  $n$ -ter Ordnung im  $R_n$  (*Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss.*, München, math.-naturw. Abt., 1934, pp. 191-193).
- [29] — Strukturprobleme bei reeller Gebilden (*Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss.*, München, math.-naturw. Abt., 1935, pp. 183-188).
- [30] — Über ebene Bogen und Kurven von Maximalindex im weiteren Sinne (*Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss.*, München, math.-naturw. Abt., 1935, pp. 37-70).
- [31] — Ergänzung eines Zitates in meiner Note: Verallgemeinerung eines Satzes der Herren Juel und Stenfors (*Sitzungsber. d. Phys.-med. Soz. zu Erlangen*, t. 67, 1935, pp. 13-14).
- [32] — Zur Differentialgeometrie  $k$ -dimensionaler Gebilde im  $R_n$  (*Journ. de Crelle*, t. 176, 1936, pp. 95-111).
- [33] — Gestaltsprobleme bei reellen Gebilden (*Monatsh. f. Math. u. Phys.*, t. 43, 1936, pp. 261-274).
- [34] HJELMSLEV, J. Contribution à la géométrie infinitésimale de la courbe réelle (*Overs. over. d. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Forhandl.*, 1911, pp. 433-494).
- [35] — Introduction à la théorie des suites monotones (*Overs. over d. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Forhandl.*, 1914, pp. 3-74).
- [36] — Die graphische Geometrie (*Forhandl. Åttonde skandinav. Matematikerkongr.*, Stockholm, 1934).
- [37] JUEL, C. Om simple cycliske kurver (*D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter*, s. 7, t. 8, 1911, pp. 365-384).
- [38] — Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung (*D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter*, s. 7, t. 11, 1914, pp. 113-168).

- [39] JUEL, C. Einleitung in die Theorie der Elementarflächen dritter Ordnung (*Math. Annalen*, t. 76, 1915, pp. 348-374).
- [40] — Beispiele von Elementarkurven und Elementarflächen (*Atti del Congr. Intern. d. matematici, Bologna*, 1928, t. 4, Comunicazioni Sez. 2, p. 195).
- [41] KIVIKOSKI, E. (= E. Stenfors). Kennzeichnung der Kurven zweiter und dritter Ordnung (*Ann. Acad. Sc. Fennicæ*, t. 44, 1935, Nr. 2, pp. 1-31).
- [42] LINSMAN, M. Sur les surfaces réglées du troisième ordre en géométrie finie (*Bull. des Sc. math.*, t. 60, 1936).
- [43] — Sur les arcs et les courbes réels gauches du quatrième ordre (*Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, Paris, t. 204, 1937, p. 463).
- [44] MARCHAUD, A. Sur les continus d'ordre borné (*Acta mathematica*, t. 55, 1930, pp. 67-115).
- [45] — Sur diverses extensions de la notion de continu d'ordre borné (*Ann. de l'Ec. Norm. Supér.*, 1932, pp. 113-135).
- [46] — Sur les surfaces convexes (*Bull. des Sc. math.*, t. 58, 1934, pp. 52-57).
- [47] — Sur les surfaces du second ordre en géométrie finie (*Journ. de math. p. et appl.*, s. 15, t. 9, 1936, pp. 293-300).
- [48] MENGER, K. *Kurventheorie* (Leipzig, 1932).
- [49] MEYNIÉUX. Sur les surfaces élémentaires du troisième ordre (*Bull. des Sc. math.*, t. 60, 1936, pp. 232-234).
- [50] MOHRMANN, H. Die Minimalzahl der stationären Ebenen eines räumlichen Ovals (*Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss.*, München, math.-phys. Klasse, 1917, p. 1).
- [51] MONTEL, P. Sur la géométrie finie et les travaux de M. C. Juel (*Bull. des Sc. math.*, t. 48, 1924, pp. 109-128).
- [52] — Sur le principe de correspondance et une démonstration de Fatou (*Bull. des Sc. math.*, t. 57, 1933, pp. 151-156).
- [53] MUKHOPADHYAYA, S. *Collected geometrical Papers* (*Calcutta University press*, 1<sup>re</sup> partie, 1929; 2<sup>me</sup> partie, 1931).
- [54] PIAZOLLA-BELOCH, M. Sopra una classe notevole di curve topologiche piane (*Rend. Circ. mat. Palermo*, t. 57, 1933, pp. 1-9).
- [55] — Sur une famille remarquable de courbes topologiques planes (*C. R.*, Paris, t. 196, 1933, pp. 1193-1195).
- [56] ROSENTHAL, A. Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven (*Math. Annalen*, t. 73, 1915, pp. 480-521).
- [57] — Über Kontinua von endlicher Ordnung (*Journ. de Crelle*, t. 167, 1932, pp. 270-273).
- [58] — Die Translationordnung ebener Kurven (*Monatsh. f. Math. u. Phys.*, t. 45, 1936, pp. 76-91).
- [59] SAUTER, I. Über die Stetigkeit der Tangentialschmieghalbräume eines Bogens  $n$ -ter (Realitäts-) Ordnung im projectiven  $R_n$  (*Sitzungsber. d. Phys.-med. Soz. zu Erlangen*, t. 65, 1934, pp. 189-190).
- [60] — Zur Theorie der Bogen  $n$ -ter (Realitäts-) Ordnung im  $R_n$ . Erste Mitt. (*Math. Zeitschr.*, t. 41, 1936, pp. 507-536); zweite Mitt. (*ibid.*, t. 42, 1937, pp. 580-592).
- [61] SCHERK, P. Über reelle geschlossene Raumkurven vierter Ordnung (*Math. Annalen*, t. 112, 1936, pp. 743-766).

- [62] SEGRE, B. Intorno alle ovali sghembe, e su di un'estensione del teorema di Cavalieri-Lagrange alle funzioni di due variabili (*R. Acc. d'Italia*, memor. della cl. di Sc. Fis., Mat. e Natur., t. 7, 1936, pp. 365-397).
- [63] Sz. NAGY, J. von. Über Flächen vom Maximalindex (*Math. Annalen*, t. 98, 1928, pp. 657-683).
- [64] — Über die ebenen reduziblen Kurven gegebener Klasse vom Maximalklassenindex mit der Maximalzahl ineinanderliegender Ovale (*Math. Annalen*, t. 103, 1930, pp. 502-515).  
On trouve dans ce travail [64], et dans une note de M. Haupt [31], une liste des nombreuses et belles publications de M. v. Sz. Nagy jusqu'en 1934-35. Depuis lors ont, entre autres, encore paru:
- [65] — Über die Ovaloidschalen der Flächen vom Maximalindex (*Acta Litt. Sc. Szeged*, t. 7, 1935, pp. 244-248).
- [66] — Über die ebenen Kurven ohne Tangentensingularität und vom Index Null (*Mat. természett. Ertes.*, t. 54, 1936, pp. 358-372. — Ce travail, écrit en hongrois, est complété par un résumé en allemand, pp. 373-374).
- [67] — Über die Buschenveloppen von H. Brunn (*Math. Zeitschr.*, t. 41, 1936, pp. 479-492).
- [68] — Über die Raumkurven vom Maximalindex (*Mat. természett. Ertes.*, t. 54, 1936, pp. 685-709, avec un résumé en allemand, pp. 710-711). Une rédaction en allemand paraîtra bientôt dans le *Journ. de Crelle*.

## ADDENDA

(Travaux parus après la rédaction de ce mémoire.)

- [69] HAUPT, O. Zum Verteilungssatz der Strukturtheorie reeller Gebilde (*Monatsh. f. Math. u. Phys.*, t. 46, 1937, pp. 84-92).
- [70] — Bestimmung der zyklisch ordnungshomogenen ebenen Bogen (*Journ. de Crelle*, t. 178, 1937).
- [72] — Über den Begriff des Gebildes von endlicher linearen Ordnung in  $n$ -dimensionalen Raum (*Sitzungsber. d. Phys.-Med. Soz. zu Erlangen*, t. 69, 1937, pp. 241-246).
- [72] SCHERK, P. Über differenzierbare Kurven und Bögen (*Journ. tchécoslovaque de Math. et de Phys.*, 1937, pp. 165-191).

(Terminé à Marseille, le 30 janvier 1937).