Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE APPLICATION DE LA FORMULE DE SALMON

Autor: Humbert, Pierre

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28586

UNE APPLICATION DE LA FORMULE DE SALMON

PAR

Pierre HUMBERT (Montpellier).

Proposons-nous de résoudre le problème suivant:

Soient, dans un plan, deux courbes algébriques C_1 *et* C_2, *de degrés respectifs* m_1 *et* m_2, *et un point fixe* O. *Une sécante mobile, passant par* O, *rencontre* C_1 *en* A_1 *et* C_2 *en* A_2. *Quel est le degré de la courbe* K *décrite par le point* M *partageant dans un rapport constant le segment* $A_1 A_2$?

La solution de ce problème peut s'obtenir d'une façon très simple en utilisant l'artifice qui suit.

Le point O et la courbe C_1 restant fixes dans leur plan (que nous nous appellerons P_1), faisons subir à la courbe C_2 une translation perpendiculaire à P_1, d'amplitude quelconque, l'amenant en C_2' dans un plan P_2 parallèle à P_1. Soit Δ la perpendiculaire commune à ces deux plans, passant par O. Considérons à présent la surface réglée Σ dont les génératrices s'appuient sur les trois directrices C_1, C_2' et Δ. On voit immédiatement que si l'on coupe cette surface par un plan P, parallèle à P_1 et P_2, et convenablement choisi, la projection sur P_1 de l'intersection de P avec une génératrice quelconque sera précisément le point M de l'énoncé. La courbe K n'est donc autre que la projection sur P_1 de l'intersection de Σ par P: le degré de cette courbe est donc le degré de la surface Σ.

Or, la formule bien connue, dite de Salmon, donne aisément ce degré: on sait qu'elle indique que ce degré D est, dans le cas général

$$D = 2 m_1 m_2 m_3 - \Sigma \lambda_{12} m_3 ,$$

m_1, m_2 et m_3 étant les degrés respectifs des trois directrices, λ_{12} le nombre des points d'intersection des directrices 1 et 2. N'oublions pas, d'ailleurs, que cette formule (qui souffre parfois des exceptions) est toujours exacte quand une des directrices est une droite, ce qui est ici le cas.

Nous avons donc, en l'occurrence, $m_3 = 1$. Quelles sont les valeurs des λ ?

1. Points d'intersection de C_1 et de C_2'. Les deux courbes, étant dans des plans parallèles, ne pourront avoir de points communs qu'à l'infini, et nous sommes ainsi amenés à envisager les points à l'infini communs à C_1 et à C_2. Supposons qu'un tel point existe, et soit d'ordre μ_1 pour C_1 et μ_2 pour C_2: nous devrons introduire dans la formule le terme $-\mu_1 \mu_2$, ainsi que les termes analogues pour les autres points de même nature.

2. Points d'intersection de C_1 avec Δ. Ceci nous conduit à considérer le cas où O serait sur C_1: nous appellerons h_1 son ordre de multiplicité éventuel sur cette courbe. Le terme à introduire sera alors $-h_1 m_2$. De même la valeur du coefficient λ_{23} sera h_2, ordre de multiplicité éventuel de O sur C_2.

Finalement, nous obtenons le résultat suivant pour le degré cherché:

$$D = 2m_1 m_2 - \Sigma \mu_1 \mu_2 - h_1 m_2 - h_2 m_1 ,$$

où la somme Σ est étendue à tous les points à l'infini communs à C_1 et à C_2, où μ_1 et μ_2 sont les ordres respectifs de multiplicité de ces points sur C_1 et sur C_2, où h_1 et h_2 sont les ordres respectifs de multiplicité de O sur C_1 et sur C_2.

On voit avec quelle facilité la formule de Salmon donne la solution demandée, que d'autres méthodes auraient sans doute établie moins aisément.

Une application très intéressante est la suivante. Supposons que la courbe C_2 soit un cercle de centre O. On établira alors très simplement que la courbe K est une *conchoïde* de la courbe C_1. D'où le résultat: le degré de la conchoïde d'une courbe algébrique C de degré m par rapport à un pôle O est donné par la formule

$$D = 4m - 2\mu - 2h ,$$

où μ est l'ordre de multiplicité éventuel des points cycliques sur C_1 et h l'ordre de multiplicité éventuel du pôle sur C.

Ainsi, si C est un cercle et O un point de ce cercle, on trouve

$$D = 8 - 2 - 2 ;$$

c'est bien le degré du limaçon de Pascal, courbe d'ordre 4.