

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1938)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** UNE APPLICATION DE LA FORMULE DE SALMON  
**Autor:** Humbert, Pierre  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28586>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 07.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# UNE APPLICATION DE LA FORMULE DE SALMON

PAR

Pierre HUMBERT (Montpellier).

Proposons-nous de résoudre le problème suivant :

*Soient, dans un plan, deux courbes algébriques  $C_1$  et  $C_2$ , de degrés respectifs  $m_1$  et  $m_2$ , et un point fixe  $O$ . Une sécante mobile, passant par  $O$ , rencontre  $C_1$  en  $A_1$  et  $C_2$  en  $A_2$ . Quel est le degré de la courbe  $K$  décrite par le point  $M$  partageant dans un rapport constant le segment  $A_1 A_2$  ?*

La solution de ce problème peut s'obtenir d'une façon très simple en utilisant l'artifice qui suit.

Le point  $O$  et la courbe  $C_1$  restant fixes dans leur plan (que nous nous appellerons  $P_1$ ), faisons subir à la courbe  $C_2$  une translation perpendiculaire à  $P_1$ , d'amplitude quelconque, l'amenant en  $C'_2$  dans un plan  $P_2$  parallèle à  $P_1$ . Soit  $\Delta$  la perpendiculaire commune à ces deux plans, passant par  $O$ . Considérons à présent la surface réglée  $\Sigma$  dont les génératrices s'appuient sur les trois directrices  $C_1$ ,  $C'_2$  et  $\Delta$ . On voit immédiatement que si l'on coupe cette surface par un plan  $P$ , parallèle à  $P_1$  et  $P_2$ , et convenablement choisi, la projection sur  $P_1$  de l'intersection de  $P$  avec une génératrice quelconque sera précisément le point  $M$  de l'énoncé. La courbe  $K$  n'est donc autre que la projection sur  $P_1$  de l'intersection de  $\Sigma$  par  $P$ : le degré de cette courbe est donc le degré de la surface  $\Sigma$ .

Or, la formule bien connue, dite de Salmon, donne aisément ce degré: on sait qu'elle indique que ce degré  $D$  est, dans le cas général

$$D = 2m_1 m_2 m_3 - \Sigma \lambda_{12} m_3 ,$$

$m_1$ ,  $m_2$  et  $m_3$  étant les degrés respectifs des trois directrices,  $\lambda_{12}$  le nombre des points d'intersection des directrices 1 et 2. N'oublions pas, d'ailleurs, que cette formule (qui souffre parfois des exceptions) est toujours exacte quand une des directrices est une droite, ce qui est ici le cas.

Nous avons donc, en l'occurrence,  $m_3 = 1$ . Quelles sont les valeurs des  $\lambda$  ?

1. Points d'intersection de  $C_1$  et de  $C'_2$ . Les deux courbes, étant dans des plans parallèles, ne pourront avoir de points communs qu'à l'infini, et nous sommes ainsi amenés à envisager les points à l'infini communs à  $C_1$  et à  $C_2$ . Supposons qu'un tel point existe, et soit d'ordre  $\mu_1$  pour  $C_1$  et  $\mu_2$  pour  $C_2$ : nous devons introduire dans la formule le terme  $-\mu_1\mu_2$ , ainsi que les termes analogues pour les autres points de même nature.

2. Points d'intersection de  $C_1$  avec  $\Delta$ . Ceci nous conduit à considérer le cas où  $O$  serait sur  $C_1$ : nous appellerons  $h_1$  son ordre de multiplicité éventuel sur cette courbe. Le terme à introduire sera alors  $-h_1 m_2$ . De même la valeur du coefficient  $\lambda_{23}$  sera  $h_2$ , ordre de multiplicité éventuel de  $O$  sur  $C_2$ .

Finalement, nous obtenons le résultat suivant pour le degré cherché:

$$D = 2m_1m_2 - \Sigma \mu_1\mu_2 - h_1m_2 - h_2m_1,$$

où la somme  $\Sigma$  est étendue à tous les points à l'infini communs à  $C_1$  et à  $C_2$ , où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont les ordres respectifs de multiplicité de ces points sur  $C_1$  et sur  $C_2$ , où  $h_1$  et  $h_2$  sont les ordres respectifs de multiplicité de  $O$  sur  $C_1$  et sur  $C_2$ .

On voit avec quelle facilité la formule de Salmon donne la solution demandée, que d'autres méthodes auraient sans doute établie moins aisément.

Une application très intéressante est la suivante. Supposons que la courbe  $C_2$  soit un cercle de centre  $O$ . On établira alors très simplement que la courbe  $K$  est une *conchoïde* de la courbe  $C_1$ . D'où le résultat: le degré de la conchoïde d'une courbe algébrique  $C$  de degré  $m$  par rapport à un pôle  $O$  est donné par la formule

$$D = 4m - 2\mu - 2h,$$

où  $\mu$  est l'ordre de multiplicité éventuel des points cycliques sur  $C_1$  et  $h$  l'ordre de multiplicité éventuel du pôle sur  $C$ .

Ainsi, si  $C$  est un cercle et  $O$  un point de ce cercle, on trouve

$$D = 8 - 2 - 2;$$

c'est bien le degré du limaçon de Pascal, courbe d'ordre 4.