II. — Relations différentielles dans le triangle.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

d'où

$$OQ = \frac{OC \cdot OP}{OM} = \frac{\alpha \cdot \alpha^2}{1} = \alpha^3 ,$$

c'est-à-dire un infiniment petit du troisième ordre.

Nous pouvons tirer la droite MQ, mener la parallèle par C à cette droite et obtenir un infiniment petit du quatrième ordre, et ainsi de suite.

II. — Relations différentielles dans le triangle.

Soit le triangle ABC (fig. 2), dans lequel

$$b = a \frac{\sin B}{\sin (B + C)} .$$

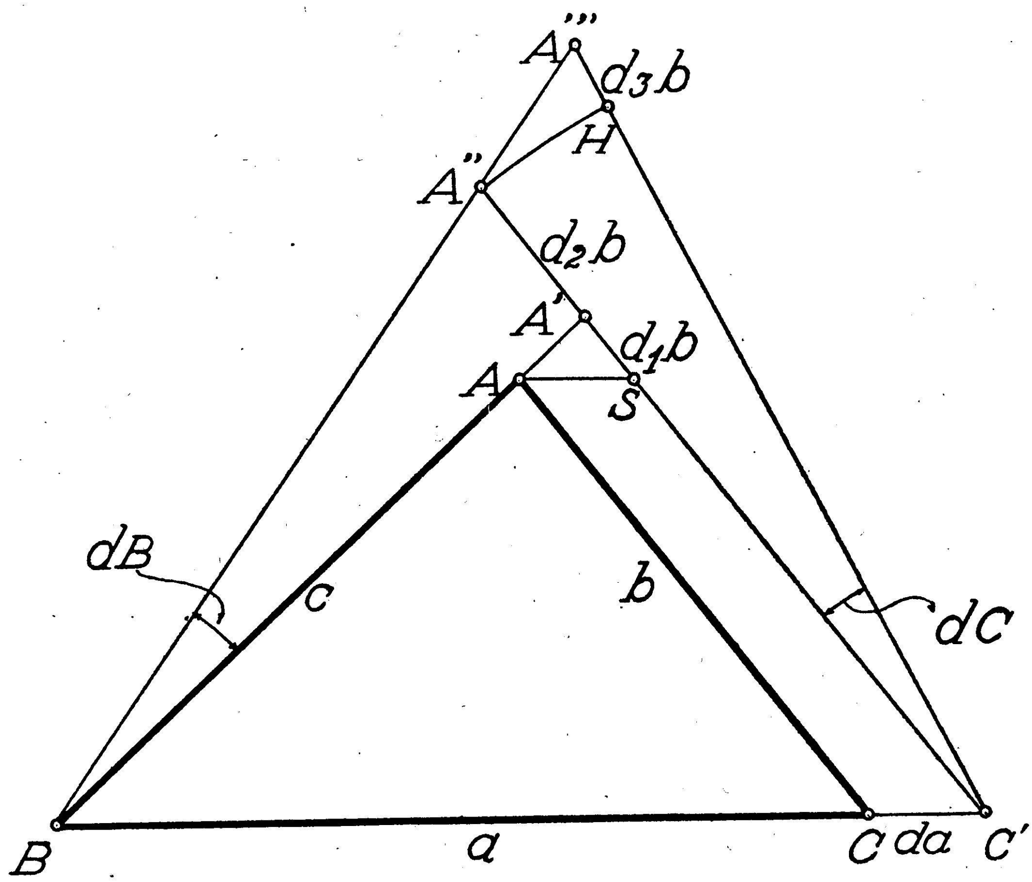

Fig 2

Si on donne aux éléments supposés connus de petites variations da, dB, dC que nous supposerons positives (c'est-à-dire qui font augmenter la valeur de ces éléments), l'élément inconnu b recevra aussi une petite variation et au lieu de la longueur CA, nous obtiendrons la longueur C′A‴, dont l'excès sur CA sera donné par la formule

$$db = da\frac{\sin B}{\sin (B + C)} + a\frac{\sin (B + C) \cos B - \sin B \cdot \cos (B + C)}{\sin^2 (B + C)} dB$$

$$- a\frac{\sin B \cdot \cos (B + C)}{\sin^2 (B + C)} dC =$$

$$= da\frac{\sin B}{\sin (B + C)} + a\frac{\sin C}{\sin^2 (B + C)} dB - a\frac{\sin B \cdot \cos (B + C)}{\sin^2 (B + C)} dC ,$$

qui s'obtient par différentiation de l'équation (1), et qui peut être retrouvée géométriquement comme nous allons le voir.

La petite variation da ou CC′ subie par la longueur du côté a, change le triangle ABC en A′BC′. Menons par A la parallèle AS à BC, et nous aurons SC′ = AC, de sorte que A′S = $d_1 b$ est l'excès de AC′ sur AC. Mais le triangle A′AS, semblable au triangle ABC, nous donne

$$d_1 b = da\frac{\sin B}{\sin (B + C)} .$$

La petite variation dB dans la valeur de l'angle B change le triangle, transformé déjà en A′BC′ par la petite variation de la longueur de la base, en A″BC′, ce qui ajoute à la longueur de b = A′C le petit accroissement A″A′ = $d_2 b$. Le triangle A″A′B nous donne

$$\frac{A''A'}{dB} = \frac{A'B}{\sin BA''C'} = \frac{A'B}{\sin (B + C)} , \qquad (2)$$

parce que

$$BA''C' = \pi - B - dB - C ,$$

où nous pouvons négliger le terme dB.

De même, le triangle A′BC′ nous donne, en négligeant les infiniment petits,

$$\frac{A'B}{\sin C} = \frac{a}{\sin (B + C)} . \qquad (3)$$

En multipliant membre à membre les équations (2) et (3), et en supprimant le facteur A'B dans les deux membres, on obtient

$$d_2 b = A''A' = a \frac{\sin C}{\sin^2 (B + C)} dB .$$

Si maintenant nous considérons la petite variation dC qui modifie la valeur de l'angle C, le triangle ABC, premièrement changé en A'BC' par la variation da, et après en A"BC' par la variation dB, sera finalement changé en A'''BC'. Calculons l'excès $d_3 b$ de la valeur finale, A'''C', du côté b sur sa deuxième valeur intermédiaire A"C'. Du point C' comme centre, avec A"C' comme rayon, décrivons l'arc de circonférence A"H, dont la longueur est, à d'infiniment petits près,

$$A''H = b \cdot dC = a \frac{\sin B}{\sin (B + C)} dC .$$

Mais, l'arc A"H étant infiniment petit, le triangle A'''A"H peut être considéré comme un triangle rectiligne, rectangle en H, et on aura, à d'infiniment petits d'ordre supérieur près,

$$d_3 b = A'''H = A''H \operatorname{cotang} A''A'''H = -a \frac{\sin B \cdot \cos (B + C)}{\sin^2 (B + C)} dC ,$$

car on a

$$\operatorname{cotang} A''A'''H = -\operatorname{cotang} (B + dB + C + dC) .$$

La somme des trois valeurs $d_1 b$, $d_2 b$, $d_3 b$, nous donne finalement l'expression cherchée de db.

III. — Dérivées partielles d'ordre supérieur.

Il s'agit de faire voir par des considérations géométriques (ceci étant déjà démontré analytiquement), que dans le calcul des dérivées partielles d'ordre supérieur d'une fonction de plusieurs variables, on peut intervertir l'ordre des dérivations.

Soit une fonction de deux variables

$$z = f(x, y) \qquad (1)$$