

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES APPELS A L'INTUITION GÉOMÉTRIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE
Kapitel: III. – DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR.
Autor: de Losada y Puga, Cristóbal
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28587>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

En multipliant membre à membre les équations (2) et (3), et en supprimant le facteur $A'B$ dans les deux membres, on obtient

$$d_2 b = A''A' = a \frac{\sin C}{\sin^2 (B + C)} dB .$$

Si maintenant nous considérons la petite variation dC qui modifie la valeur de l'angle C , le triangle ABC , premièrement changé en $A'BC'$ par la variation da , et après en $A''BC'$ par la variation dB , sera finalement changé en $A'''BC'$. Calculons l'excès $d_3 b$ de la valeur finale, $A'''C'$, du côté b sur sa deuxième valeur intermédiaire $A''C'$. Du point C' comme centre, avec $A''C'$ comme rayon, décrivons l'arc de circonférence $A''H$, dont la longueur est, à d'infiniment petits près,

$$A''H = b \cdot dC = a \frac{\sin B}{\sin (B + C)} dC .$$

Mais, l'arc $A''H$ étant infiniment petit, le triangle $A'''A''H$ peut être considéré comme un triangle rectiligne, rectangle en H , et on aura, à d'infiniment petits d'ordre supérieur près,

$$d_3 b = A'''H = A''H \cotang A''A'''H = - a \frac{\sin B \cdot \cos (B + C)}{\sin^2 (B + C)} dC ,$$

car on a

$$\cotang A''A'''H = - \cotang (B + dB + C + dC) .$$

La somme des trois valeurs $d_1 b$, $d_2 b$, $d_3 b$, nous donne finalement l'expression cherchée de db .

III. — DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Il s'agit de faire voir par des considérations géométriques (ceci étant déjà démontré analytiquement), que dans le calcul des dérivées partielles d'ordre supérieur d'une fonction de plusieurs variables, on peut intervertir l'ordre des dérivations.

Soit une fonction de deux variables

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

et A un point quelconque de la surface représentative de cette fonction, dont l'ordonnée z est AP (fig. 3). Si nous donnons à x un accroissement $dx = PQ$, nous aurons un nouveau point B de la surface et une nouvelle ordonnée BQ. Or, BB', différence des deux ordonnées, provenant d'avoir donné un accroissement à x seulement, sera

$$BB' = z' - z = \frac{\partial z}{\partial x} dx = d_x z . \quad (2)$$

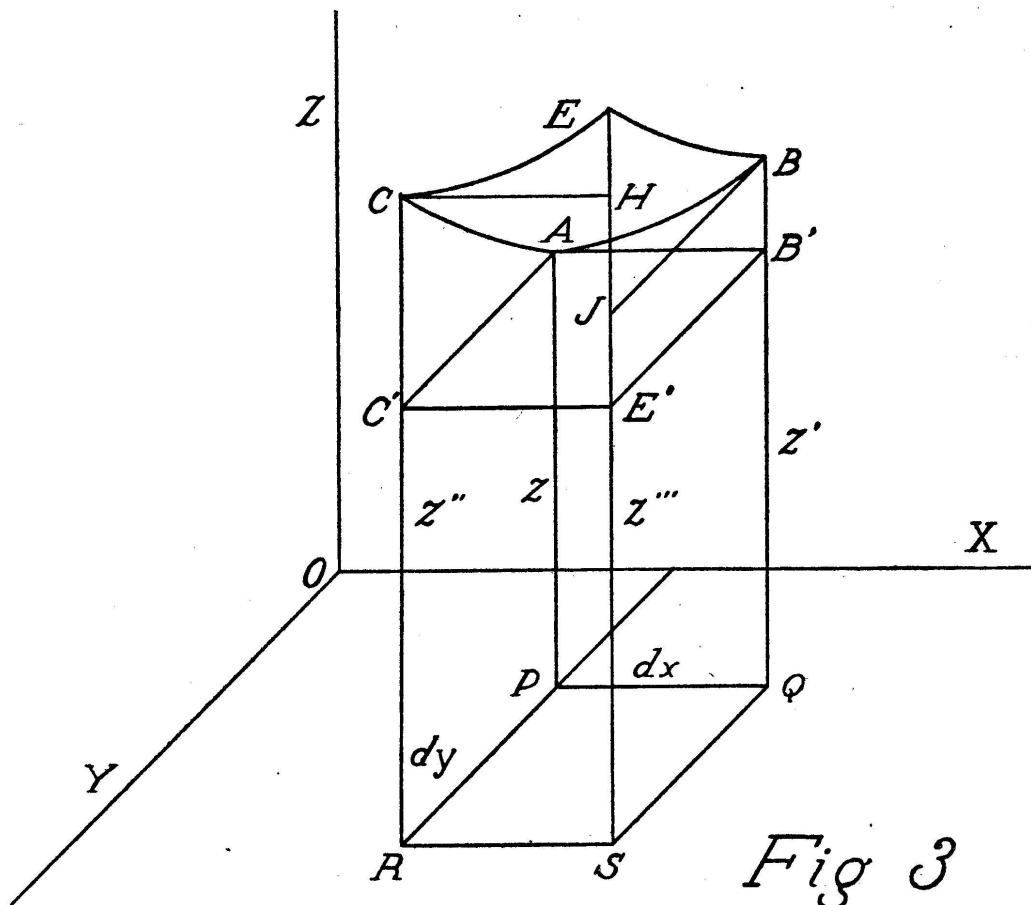


Fig 3

Partons encore une fois du point P, donnons seulement à y un accroissement infiniment petit $dy = PR$, et nous aurons un nouveau point C de la surface, auquel correspondra une ordonnée $z'' = CR$. La différence des ordonnées z et z'' sera de manière analogue

$$CC' = z'' - z = \frac{\partial z}{\partial y} dy = d_y z . \quad (3)$$

Finalement, à partir du point R ($x, y + dy$), donnons à x un accroissement dx ; nous obtiendrons ainsi un nouveau point E

de la surface, avec une ordonnée $ES = z'''$. Comparons z''' avec z' et avec z'' :

$$EJ = ES - BQ = \frac{\partial z}{\partial y} dy = d_y z . \quad (4)$$

Les équations (3) et (4) montrent que CC' et EJ sont deux valeurs consécutives de $\frac{\partial z}{\partial y} dy$, correspondantes à des valeurs de x qui diffèrent entre elles de dx ; donc leur différence sera:

$$EJ - CC' = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) dy dx = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy dx . \quad (5)$$

De même,

$$EH = ES - CR = \frac{\partial z}{\partial x} dx = d_x z . \quad (6)$$

Les équations (2) et (6) font voir que BB' et EH sont deux valeurs consécutives de $\frac{\partial z}{\partial x} dx$ correspondantes à des valeurs de y qui diffèrent de dy ; ainsi leur différence sera

$$EH - BB' = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) dx dy = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx dy . \quad (7)$$

Donc, l'ordre des différentiations successives sera indifférent si

$$EJ - CC' = EH - BB' ,$$

égalité qui devient une identité évidente si nous y remplaçons EJ par son égal $EE' - BB'$, et EH par son égal $EE' - CC'$.

IV. — EXPLICATION GÉOMÉTRIQUE DE LA MÉTHODE D'INTÉGRATION PAR PARTIES.

Il s'agit de la formule classique

$$\int_M^N u dv = (uv)_M^N - \int_M^N v du . \quad (1)$$

Considérons une fonction de deux variables

$$f(u, v) = 0 \quad (2)$$