

# IV. — Explication géométrique DE LA MÉTHODE D'INTÉGRATION PAR PARTIES.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

de la surface, avec une ordonnée  $ES = z'''$ . Comparons  $z'''$  avec  $z'$  et avec  $z''$ :

$$EJ = ES - BQ = \frac{\partial z}{\partial y} dy = d_y z . \quad (4)$$

Les équations (3) et (4) montrent que  $CC'$  et  $EJ$  sont deux valeurs consécutives de  $\frac{\partial z}{\partial y} dy$ , correspondantes à des valeurs de  $x$  qui diffèrent entre elles de  $dx$ ; donc leur différence sera:

$$EJ - CC' = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy dx = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy dx . \quad (5)$$

De même,

$$EH = ES - CR = \frac{\partial z}{\partial x} dx = d_x z . \quad (6)$$

Les équations (2) et (6) font voir que  $BB'$  et  $EH$  sont deux valeurs consécutives de  $\frac{\partial z}{\partial x} dx$  correspondantes à des valeurs de  $y$  qui diffèrent de  $dy$ ; ainsi leur différence sera

$$EH - BB' = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx dy = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx dy . \quad (7)$$

Donc, l'ordre des différentiations successives sera indifférent si

$$EJ - CC' = EH - BB' ,$$

égalité qui devient une identité évidente si nous y remplaçons  $EJ$  par son égal  $EE' - BB'$ , et  $EH$  par son égal  $EE' - CC'$ .

#### IV. — EXPLICATION GÉOMÉTRIQUE DE LA MÉTHODE D'INTÉGRATION PAR PARTIES.

Il s'agit de la formule classique

$$\int_M^N u dv = (uv)_M^N - \int_M^N v du . \quad (1)$$

Considérons une fonction de deux variables

$$f(u, v) = 0 \quad (2)$$

qui peut être représentée graphiquement par une courbe telle que AB (fig. 4). Soient deux points,  $M(u_0, v_0)$  et  $N(u_1, v_1)$ , sur cette courbe. Nous voulons calculer l'aire comprise entre la portion MN de la courbe, les ordonnées MP et NQ correspondantes aux points extrêmes et la portion PQ de l'axe des abscisses.

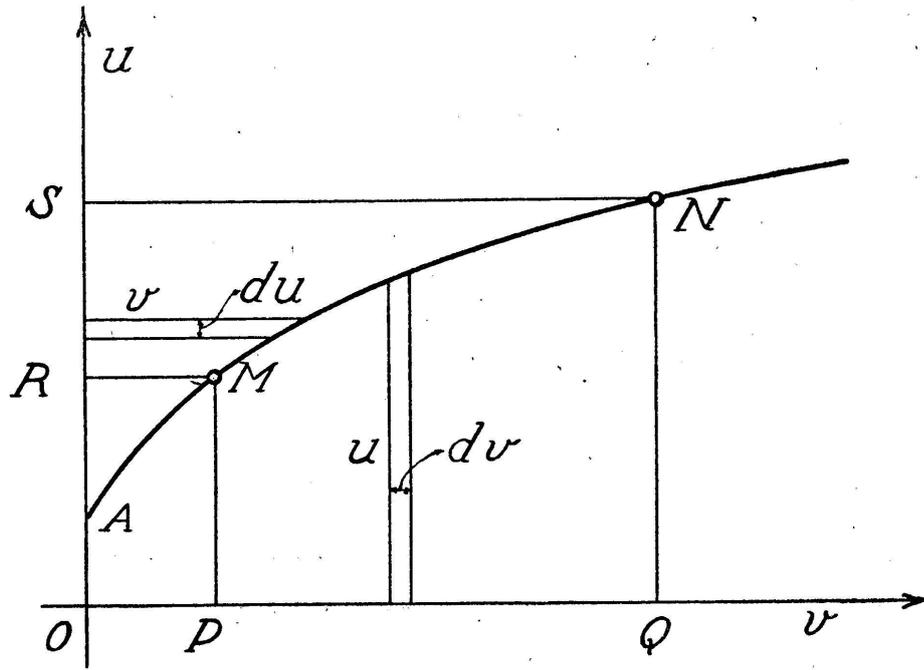


Fig 4

dantes aux points extrêmes et la portion PQ de l'axe des abscisses. Pour cela, il faut résoudre l'équation (2) par rapport à  $u$ , exprimant sa valeur en fonction de  $v$ , et trouver la valeur de l'intégrale

$$\int u dv$$

entre les limites M et N. Mais il y a des cas dans lesquels il n'est pas facile de réaliser cette intégration, et en revanche il serait facile d'intégrer l'expression

$$\int v du,$$

où il faudra exprimer  $v$  en fonction de  $u$ , en tirant sa valeur de l'équation (2). Dans ces cas, il ne sera pas facile de calculer l'aire MNPQ, qui est

$$\text{aire MNPQ} = \int_M^N u dv$$

(intégrale que nous supposons difficile) mais il sera aisé de trouver l'aire MNRS, parce que

$$\text{aire MNRS} = \int_M^N v du$$

(intégrale que nous supposons facile).

D'autre part, les aires des rectangles SNOQ et RMOP se déterminent facilement: elles sont égales respectivement à  $u_0 v_0$  et à  $u_1 v_1$ .

Or, connaissant les aires SNOQ, RMOP et MNRS, nous pouvons en déduire l'aire MNPQ, car

$$\text{aire MNPQ} = \text{aire SNOQ} - \text{aire RMOP} - \text{aire MNRS}$$

c'est-à-dire

$$\int_M^N u dv = u_1 v_1 - u_0 v_0 - \int_M^N v du ,$$

qui est précisément la formule (1).

## V. — SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE DE LA CONSTANTE D'EULER.

La constante d'Euler,

$$C = \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \log \text{ nép } n \right]_{n \rightarrow \infty}$$

qui établit une relation simple entre  $\sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m}$  et  $\log \text{ nép } n$  quand  $n \rightarrow \infty$ , a sa raison d'être dans cette circonstance que le terme général de la série est  $1/m$  tandis que la dérivée de  $\log \text{ nép } x$  est  $1/x$ . Construisons, comme le montre la figure 5, une succession de rectangles de base égale à l'unité, et de hauteurs égales à  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ . Ces rectangles seront compris entre les ordonnées successives tirées par les points d'abscisses égales à 1, 2, 3,