# VI. — Série double dont la somme est égale A LA CONSTANTE D'EULER.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

On vérifie immédiatement sur la figure l'exactitude de la formule (2), parce que la somme des rectangles *abmc*, *cdne*, *eutz*, ... est équivalente au rectangle $1ab2$.

Faisons encore une remarque. L'hyperbole équilatère divise chacun des rectangles *abmc*, *cdne*, *eutz*, ... en deux parties qui, en raison de la convexité de la courbe par rapport à l'axe des abscisses, sont inégales. La partie qui reste au-dessous de la courbe (triangles non hachurés) est moindre que celle qui reste au-dessus (triangles hachurés). Et ainsi, la constante d'Euler est plus grande que $\frac{1}{2}$ ($C = 0.57721...$) tandis que la constante $C'$ est moindre que $\frac{1}{2}$ ($C' = 0.42278...$).

Mais les rectangles seront divisés par leurs diagonales *ac*, *ce*, *ez*, ... en deux triangles égaux, dont les sommes vaudront $\frac{1}{2}\cdot$ En conséquence, entre l'hyperbole équilatère et ces diagonales, qui sont des cordes de la courbe, seront compris un ensemble de segments ou lunules, dont les aires auront pour somme $C - \frac{1}{2}$, soit 0.07721... En calculant analytiquement la somme des aires de ces segments ou lunules, on obtient identiquement $C - \frac{1}{2}$ : leur considération ne présente, donc, aucune utilité pour le calcul de C.

## VI. — Série double dont la somme est égale a la constante d'Euler.

A propos de la constante d'Euler, je vais mentionner une série double dont la somme est égale à la valeur de la constante; quoique ce sujet ne représente pas « un appel à l'intuition géométrique », je crois qu'il n'est pas trop déplacé ici.

Posons le développement de log nép $n$ en série de Taylor à partir du développement de log nép $(n - 1)$

$$\log \text{nép}\, n = \log \text{nép}\, (n - 1) +$$
$$+ \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2(n-1)^2} + \frac{1}{3(n-1)^3} - \dots + \frac{(-1)^{s-1}}{s(n-1)^s}\cdot$$

Cette formule générale nous donne successivement:

$$\log \text{nép } 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

$$\begin{aligned}\log \text{nép } 3 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log \text{nép } 4 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} - \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \cdots\end{aligned}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Nous pouvons exprimer ainsi log nép $n$ par la somme de $n - 1$ séries, dont la première est convergente et les $n - 2$ autres sont absolument convergentes. Nous aurons, donc, l'expression générale

$$\log \text{nép } k = \sum_{n=1}^{n=k-1} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m \cdot n^m}.$$

Si nous faisons tendre $n$ vers l'infini, cette somme de séries devient une série double que nous appelerons $\Delta$.

$$\begin{aligned}\Delta = &\frac{1}{1 \cdot 1^1} - \frac{1}{2 \cdot 1^2} + \frac{1}{3 \cdot 1^3} - \frac{1}{4 \cdot 1^4} + \frac{1}{5 \cdot 1^5} - \cdots \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 2^1} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \cdots \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 3^1} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} - \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \cdots \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 4^1} - \frac{1}{2 \cdot 4^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^3} - \frac{1}{4 \cdot 4^4} + \frac{1}{5 \cdot 4^5} - \cdots \\ &+ \frac{1}{1 \cdot 5^1} - \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} - \frac{1}{4 \cdot 5^4} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \cdots \\ &+ \cdots\end{aligned}$$

Mais cette série double n'est pas convergente, car si nous faisons la somme par colonnes, nous aurons

$$\Delta = \sum \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m^2} + \frac{1}{3} \sum \frac{1}{m^3} - \frac{1}{4} \sum \frac{1}{m^4} + \cdots$$

La première de ces sommes correspond à une série divergente et les autres à des séries convergentes; donc, la série double est divergente, ce qu'on pouvait attendre, car

$$\log \text{nép}\, n \longrightarrow \infty \qquad \text{quand} \qquad n \longrightarrow \infty\ .$$

Mais si nous formons la différence $\Sigma \frac{1}{m} - \Delta$ nous aurons

$$\left[\sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m} - \log \text{nép}\, n\right]_{n\to\infty} =$$

$$\begin{aligned} = C = {} & \frac{1}{2 \cdot 1^2} - \frac{1}{3 \cdot 1^3} + \frac{1}{4 \cdot 1^4} - \frac{1}{5 \cdot 1^5} + \cdots \\ & + \frac{1}{2 \cdot 2^2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \cdots \\ & + \frac{1}{2 \cdot 3^2} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{4 \cdot 3^4} - \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \cdots \\ & + \frac{1}{2 \cdot 4^2} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{4 \cdot 4^4} - \frac{1}{5 \cdot 4^5} + \cdots \\ & + \cdots \end{aligned}$$

Nous avons ainsi la constante d'Euler et de Mascheroni exprimée par une série double

$$C = \sum_{p=2}^{p=\infty} \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{(-1)^p}{p \cdot q^p}\ .$$

Les séries obtenues en sommant par colonnes sont convergentes, et leur sommes, dont la valeur diminue progressivement, sont alternativement positives et négatives; la série double est donc convergente.