

VI. — Série double dont la somme est égale A LA CONSTANTE D'EULER.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1938)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

On vérifie immédiatement sur la figure l'exactitude de la formule (2), parce que la somme des rectangles $abmc$, $cdne$, $eutz$, ... est équivalente au rectangle $1ab2$.

Faisons encore une remarque. L'hyperbole équilatère divise chacun des rectangles $abmc$, $cdne$, $eutz$, ... en deux parties qui, en raison de la convexité de la courbe par rapport à l'axe des abscisses, sont inégales. La partie qui reste au-dessous de la courbe (triangles non hachurés) est moindre que celle qui reste au-dessus (triangles hachurés). Et ainsi, la constante d'Euler est plus grande que $\frac{1}{2}$ ($C = 0.57721...$) tandis que la constante C' est moindre que $\frac{1}{2}$ ($C' = 0.42278...$).

Mais les rectangles seront divisés par leurs diagonales ac , ce , ez , ... en deux triangles égaux, dont les sommes vaudront $\frac{1}{2}$. En conséquence, entre l'hyperbole équilatère et ces diagonales, qui sont des cordes de la courbe, seront compris un ensemble de segments ou lunules, dont les aires auront pour somme $C - \frac{1}{2}$, soit $0.07721...$ En calculant analytiquement la somme des aires de ces segments ou lunules, on obtient identiquement $C - \frac{1}{2}$: leur considération ne présente, donc, aucune utilité pour le calcul de C .

VI. — SÉRIE DOUBLE DONT LA SOMME EST ÉGALE A LA CONSTANTE D'EULER.

A propos de la constante d'Euler, je vais mentionner une série double dont la somme est égale à la valeur de la constante; quoique ce sujet ne représente pas « un appel à l'intuition géométrique », je crois qu'il n'est pas trop déplacé ici.

Posons le développement de $\log \text{nép } n$ en série de Taylor à partir du développement de $\log \text{nép } (n - 1)$

$$\log \text{nép } n = \log \text{nép } (n - 1) + \\ + \frac{1}{n - 1} - \frac{1}{2(n - 1)^2} + \frac{1}{3(n - 1)^3} - \dots + \frac{(-1)^{s-1}}{s(n - 1)^s}.$$

Cette formule générale nous donne successivement :

$$\log \text{ nép } 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$\log \text{ nép } 3 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

$$\log \text{ nép } 4 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} - \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \dots$$

.....

Nous pouvons exprimer ainsi $\log \text{ nép } n$ par la somme de $n - 1$ séries, dont la première est convergente et les $n - 2$ autres sont absolument convergentes. Nous aurons, donc, l'expression générale

$$\log \text{ nép } k = \sum_{n=1}^{n=k-1} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m \cdot n^m}.$$

Si nous faisons tendre n vers l'infini, cette somme de séries devient une série double que nous appellerons Δ .

$$\Delta = \frac{1}{1 \cdot 1^1} - \frac{1}{2 \cdot 1^2} + \frac{1}{3 \cdot 1^3} - \frac{1}{4 \cdot 1^4} + \frac{1}{5 \cdot 1^5} - \dots$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2^1} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \dots$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 3^1} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} - \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \dots$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 4^1} - \frac{1}{2 \cdot 4^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^3} - \frac{1}{4 \cdot 4^4} + \frac{1}{5 \cdot 4^5} - \dots$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 5^1} - \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} - \frac{1}{4 \cdot 5^4} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots$$

+ ...

Mais cette série double n'est pas convergente, car si nous faisons la somme par colonnes, nous aurons

$$\Delta = \sum \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m^2} + \frac{1}{3} \sum \frac{1}{m^3} - \frac{1}{4} \sum \frac{1}{m^4} + \dots$$

La première de ces sommes correspond à une série divergente et les autres à des séries convergentes; donc, la série double est divergente, ce qu'on pouvait attendre, car

$$\log \text{nép } n \rightarrow \infty \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty .$$

Mais si nous formons la différence $\sum \frac{1}{m} - \Delta$ nous aurons

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m} - \log \text{nép } n \right]_{n \rightarrow \infty} = \\ & = C = \frac{1}{2 \cdot 1^2} - \frac{1}{3 \cdot 1^3} + \frac{1}{4 \cdot 1^4} - \frac{1}{5 \cdot 1^5} + \dots \\ & \quad + \frac{1}{2 \cdot 2^2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots \\ & \quad + \frac{1}{2 \cdot 3^2} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{4 \cdot 3^4} - \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \\ & \quad + \frac{1}{2 \cdot 4^2} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{4 \cdot 4^4} - \frac{1}{5 \cdot 4^5} + \dots \\ & \quad + \dots \end{aligned}$$

Nous avons ainsi la constante d'Euler et de Mascheroni exprimée par une série double

$$C = \sum_{p=2}^{p=\infty} \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{(-1)^p}{p \cdot q^p} .$$

Les séries obtenues en sommant par colonnes sont convergentes, et leur sommes, dont la valeur diminue progressivement, sont alternativement positives et négatives; la série double est donc convergente.