

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES APPELS A L'INTUITION GÉOMÉTRIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE
Autor: de Losada y Puga, Cristóbal
Kapitel: VI. — Série double dont la somme est égale A LA CONSTANTE D'EULER.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28587>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

On vérifie immédiatement sur la figure l'exactitude de la formule (2), parce que la somme des rectangles $abmc$, $cdne$, $eutz$, ... est équivalente au rectangle $1ab2$.

Faisons encore une remarque. L'hyperbole équilatère divise chacun des rectangles $abmc$, $cdne$, $eutz$, ... en deux parties qui, en raison de la convexité de la courbe par rapport à l'axe des abscisses, sont inégales. La partie qui reste au-dessous de la courbe (triangles non hachurés) est moindre que celle qui reste au-dessus (triangles hachurés). Et ainsi, la constante d'Euler est plus grande que $\frac{1}{2}$ ($C = 0.57721\dots$) tandis que la constante C' est moindre que $\frac{1}{2}$ ($C' = 0.42278\dots$).

Mais les rectangles seront divisés par leurs diagonales ac , ce , ez , ... en deux triangles égaux, dont les sommes vaudront $\frac{1}{2}$. En conséquence, entre l'hyperbole équilatère et ces diagonales, qui sont des cordes de la courbe, seront compris un ensemble de segments ou lunules, dont les aires auront pour somme $C - \frac{1}{2}$, soit $0.07721\dots$. En calculant analytiquement la somme des aires de ces segments ou lunules, on obtient identiquement $C - \frac{1}{2}$: leur considération ne présente, donc, aucune utilité pour le calcul de C .

VI. — SÉRIE DOUBLE DONT LA SOMME EST ÉGALE A LA CONSTANTE D'EULER.

A propos de la constante d'Euler, je vais mentionner une série double dont la somme est égale à la valeur de la constante; quoique ce sujet ne représente pas « un appel à l'intuition géométrique », je crois qu'il n'est pas trop déplacé ici.

Posons le développement de $\log \text{nép } n$ en série de Taylor à partir du développement de $\log \text{nép } (n - 1)$

$$\log \text{nép } n = \log \text{nép } (n - 1) + \\ + \frac{1}{n - 1} - \frac{1}{2(n - 1)^2} + \frac{1}{3(n - 1)^3} - \dots + \frac{(-1)^{s-1}}{s(n - 1)^s}.$$

Cette formule générale nous donne successivement :

$$\log \text{ nép } 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$\log \text{ nép } 3 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

$$\log \text{ nép } 4 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \dots$$

$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} - \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \dots$$

.....

Nous pouvons exprimer ainsi $\log \text{ nép } n$ par la somme de $n - 1$ séries, dont la première est convergente et les $n - 2$ autres sont absolument convergentes. Nous aurons, donc, l'expression générale

$$\log \text{ nép } k = \sum_{n=1}^{n=k-1} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{m \cdot n^m}.$$

Si nous faisons tendre n vers l'infini, cette somme de séries devient une série double que nous appellerons Δ .

$$\Delta = \frac{1}{1 \cdot 1^1} - \frac{1}{2 \cdot 1^2} + \frac{1}{3 \cdot 1^3} - \frac{1}{4 \cdot 1^4} + \frac{1}{5 \cdot 1^5} - \dots$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2^1} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \dots$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 3^1} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} - \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \dots$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 4^1} - \frac{1}{2 \cdot 4^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^3} - \frac{1}{4 \cdot 4^4} + \frac{1}{5 \cdot 4^5} - \dots$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 5^1} - \frac{1}{2 \cdot 5^2} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} - \frac{1}{4 \cdot 5^4} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \dots$$

+ ...

Mais cette série double n'est pas convergente, car si nous faisons la somme par colonnes, nous aurons

$$\Delta = \sum \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m^2} + \frac{1}{3} \sum \frac{1}{m^3} - \frac{1}{4} \sum \frac{1}{m^4} + \dots$$

La première de ces sommes correspond à une série divergente et les autres à des séries convergentes; donc, la série double est divergente, ce qu'on pouvait attendre, car

$$\log \text{nép } n \rightarrow \infty \quad \text{quand} \quad n \rightarrow \infty .$$

Mais si nous formons la différence $\sum \frac{1}{m} - \Delta$ nous aurons

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m} - \log \text{nép } n \right]_{n \rightarrow \infty} = \\ & = C = \frac{1}{2 \cdot 1^2} - \frac{1}{3 \cdot 1^3} + \frac{1}{4 \cdot 1^4} - \frac{1}{5 \cdot 1^5} + \dots \\ & \quad + \frac{1}{2 \cdot 2^2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{4 \cdot 2^4} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots \\ & \quad + \frac{1}{2 \cdot 3^2} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{4 \cdot 3^4} - \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \\ & \quad + \frac{1}{2 \cdot 4^2} - \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{4 \cdot 4^4} - \frac{1}{5 \cdot 4^5} + \dots \\ & \quad + \dots \end{aligned}$$

Nous avons ainsi la constante d'Euler et de Mascheroni exprimée par une série double

$$C = \sum_{p=2}^{p=\infty} \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{(-1)^p}{p \cdot q^p} .$$

Les séries obtenues en sommant par colonnes sont convergentes, et leur sommes, dont la valeur diminue progressivement, sont alternativement positives et négatives; la série double est donc convergente.