MOUVEMENTS D'UN SYSTÈME SCLÉRONOME SUR UNE TRAJECTOIRE DONNÉE

MOUVEMENTS D'UN SYSTÈME SCLÉRONOME SUR UNE TRAJECTOIRE DONNÉE

PAR

A. Wundheiler (Varsovie).

On doit à Paul Painlevé le théorème suivant [1]:

Sur une trajectoire d'un système scléronome soumis à des forces ne dépendant que de sa position, ne sont possibles que deux mouvements dans les deux sens opposés; excepté le cas où cette trajectoire pourrait être parcourue aussi par le système libre (soustrait à l'action des forces appliquées): dans ce cas une infinité de mouvements sont possibles sur cette trajectoire.

Dans cet énoncé on regarde deux mouvements sur une même trajectoire comme équivalents s'ils font correspondre les mêmes vitesses aux mêmes positions du système, en des instants différents.

Si ce théorème n'a pas reçu dans les cours toute l'attention qu'il mérite, c'est peut être parce que la démonstration que Painlevé en a donné fait emploi de certaines notations et calculs, nécessaires pour le développement de la théorie des trajectoires réelles, mais trop encombrants si l'on ne vise que le théorème précité.

Voici une démonstration très simple de ce théorème qui se borne à l'emploi des propriétés les plus élémentaires des équations de Lagrange. Cette démonstration est suivie d'une exten-

---

1 Sur les mouvements et les trajectoires réels des systèmes, *Bull. Soc. Math. de France*, t. 22 (1894), p. 145, ou *Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique et applications*, Paris, Hermann, 1895, p. 209.

sion aux systèmes non-holonomes basée sur une forme fort simple des équations de mouvement pour un tel système, extension qui est peut-être nouvelle.

1. *Systèmes holonomes.* — Soit

$$2\,\mathrm{T} = a_{jk}\,\dot{q}^j\,\dot{q}^k \qquad (h,\ i,\ j,\ k = 1,\ \ldots,\ n) \tag{1}$$

la force vive d'un système scléronome [1]. Les formules

$$q^i = f^i(t) \tag{2}$$

donnant une solution quelconque des équations de Lagrange,

$$\mathrm{L}_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q^i} = \mathrm{Q}_i\ , \tag{3}$$

tout autre mouvement sur la trajectoire (2) sera donné par les formules

$$\bar{q}^i = \bar{f}^i(t) = f^i(\varphi(t))\ , \qquad \bar{t} = \varphi(t)\ . \tag{4}$$

En marquant d'un trait toutes les grandeurs qui se rapportent au mouvement (4), on aura

$$\dot{q}^i = \dot{\bar{q}}^i\,\bar{\varphi}\ , \qquad \bar{\varphi} = d\bar{t}/dt\ .$$

$$\mathrm{T} = \bar{\varphi}^2\,\overline{\mathrm{T}}\ , \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q^i} = \bar{\varphi}^2\frac{\partial \overline{\mathrm{T}}}{\partial \bar{q}^i}\ , \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}^i} = \bar{\varphi}\,\frac{\partial \overline{\mathrm{T}}}{\partial \dot{\bar{q}}^i}\ .$$

Il s'ensuit

$$\mathrm{L}_i = \bar{\varphi}^2\,\overline{\mathrm{L}}_i + \frac{1}{\bar{\varphi}}\frac{d\bar{\varphi}}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}^i}\ . \tag{5}$$

Si les formules (4) définissent un autre mouvement sur la trajectoire (2) sous l'action des mêmes forces Q_i, on aura, à côté de (3), encore $\overline{\mathrm{L}}_i = \mathrm{Q}_i$, ce qui donne

$$\mathrm{Q}_i(1 - \bar{\varphi}^2) = \frac{1}{\bar{\varphi}}\frac{d\bar{\varphi}}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}^i}\ . \tag{6}$$

---

[1] Nous mettons les indices en haut et en bas et nous employons la *convention de sommation* bien connue: on somme par rapport à tout indice qui figure dans un monôme deux fois, en haut et en bas.

Cette équation est vérifiée pour $\overline{\varphi} = 1$, ce qui donne les mouvements équivalents à (2); et pour $\overline{\varphi} = -1$, ce qui donne les mouvements à vitesses opposées à celles de (2). Mais si elle est vérifiée aussi pour $\overline{\varphi}^2 \neq 1$, on aura pour un certain $\mu(t)$

$$Q_i = \mu(t) \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \cdot \tag{7}$$

Supposons cette condition remplie, les Q_i n'étant pas tous nuls à la fois, et prenons pour φ — en changeant les notations — une solution de l'équation

$$d\overline{\varphi}/dt = \mu(t)\overline{\varphi} .$$

On n'aura plus alors $\overline{L}_i = Q_i$, mais plutôt, en vertu de (3), (5) et (7),

$$\overline{L}_i = 0 ,$$

ce qui démontre la première assertion du théorème.

Retournons maintenant aux notations de tout à l'heure, en supposant toujours les Q_i non nuls tous à la fois. Il viendra, d'après (6) et (7),

$$d\overline{\varphi}/dt = \mu(t)\overline{\varphi}(1 - \overline{\varphi}^2)$$

où $\mu(t)$ est connu dès que les Q_i et le mouvement (2) sont donnés. Cette équation définit une famille (non linéaire !) à un paramètre des fonctions $\overline{\varphi}$ et, par conséquent, autant de mouvements différents sur la trajectoire (2).

Si tous les Q_i sont nuls à la fois, on voit tout de suite d'après (5) que

$$d\overline{\varphi}/dt = 0$$

fournit toujours un autre mouvement sur (2) dont la vitesse est dans un rapport constant avec celle de (2).

2. *Systèmes non-holonomes.* — La même démonstration s'étend presque sans changement aux systèmes non-holonomes si l'on fait usage de certaines équations qu'on pourrait appeler « *équations de Lagrange à multiplicateurs éliminés* ».

On connaît bien les équations de Lagrange pour les systèmes non-holonomes à multiplicateurs:

$$L_h = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} - \frac{\partial T}{\partial q^h} = Q_h \mp \lambda_\rho c_h^\rho , \tag{8}$$

où

$$c_i^\rho \dot{q}^i = 0 \qquad (\rho, \sigma, \tau = 1, \ldots, r < n) \tag{9}$$

sont les équations de la liaison non-holonome.

Or, il est possible, au moyen d'un artifice très simple et remarquable, de calculer les λ_ρ et d'arriver aux équations

$$'L_i = L_i + H_{ijk}\dot{q}^j\dot{q}^k = Q_i - c_i^k Q_k = 'Q_i , \tag{10}$$

où les H_{ijk} sont des fonctions des q seuls, qu'on obtient par résolution des équations linéaires et par différentiation.

Toutes les grandeurs dont on aura besoin s'expriment au moyen des certaines quantités c_i^k qui jouent un rôle central dans la théorie de la liaison (9). On pourrait considérer le système c_i^k comme « *la matrice de la liaison non-holonome* ». Ces quantités sont définies successivement par la suite des équations

$$a^{kj}a_{ij} = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k , \\ 0, & i \neq k . \end{cases} \tag{a^{kj}}$$

$$a^{kj}c_k^\rho c_j^\sigma \cdot c_{\sigma\tau} = \delta_\tau^\rho = \begin{cases} 1, & \rho = \tau , \\ 0, & \rho \neq \tau . \end{cases} \tag{$c_{\rho\tau}$}$$

$$c_i^k = a^{kj}c_{\sigma\tau}c_j^\sigma c_i^\tau . \tag{c_i^k}$$

On en déduit aisément les propriétés fondamentales:

$$c_i^k c_k^\rho = c_i^\rho \qquad \text{et} \qquad c_h^k c_i^h = c_i^k , \tag{11}$$

exprimant que c_i^k est une matrice qui se reproduit par certaines multiplications, puis

$$c_i^k \dot{q}^i = 0 \qquad \text{et} \qquad c_i^k \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} = 0 \tag{12}$$

qui ne sont que des transcriptions des équations de liaison.

Multiplions maintenant (8) par c_i^h en sommant par rapport à h. Il vient, en vertu de (11) et (12),

$$c_i^h \mathrm{L}_h = \frac{d}{dt}\left(c_i^h \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}^h}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}^h}\frac{dc_i^h}{dt} - c_i^h \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q^h}$$

$$= - a_{jh}\frac{\partial c_i^h}{\partial q^k}\dot{q}^j\dot{q}^k - c_i^h \frac{\partial a_{jk}}{\partial q^h}\dot{q}^j\dot{q}^k$$

$$= c_i^h \mathrm{Q}_h + \lambda_\varrho c_h^\varrho c_i^h = c_i^h \mathrm{Q}_h + \lambda_\varrho c_i^\varrho \,.$$

D'ici, en posant

$$2\,\mathrm{H}_{ijk} = a_{jh}\frac{\partial c_i^h}{\partial q^k} + a_{kh}\frac{\partial c_i^h}{\partial q^j} + 2\,c_i^h\frac{\partial a_{jk}}{\partial q^h}\,,$$

on obtient

$$\lambda_\varrho c_h^\varrho = - c_i^h \mathrm{Q}_h - \mathrm{H}_{ijk}\dot{q}^j\dot{q}^k \,.$$

En portant cette expression dans (8) on arrive bien aux équations (10) [1]. Ces équations ne sont pas indépendantes, on trouve aisément $c_i^k\,'\mathrm{L}_k = 0$, $c_i^k\,'\mathrm{Q}_k = 0$.

En reprenant la démonstration du théorème de Painlevé, observons qu'on a

$$\mathrm{H}_{ijk}\dot{q}^j\dot{q}^k = \bar{\varphi}^2\,\overline{\mathrm{H}}_{ijk}\dot{\bar{q}}^j\dot{\bar{q}}^k \,,$$

ce qui donne, pour les $'\mathrm{L}_i$ aussi bien que pour les L_i, l'équation analogue à (5)

$$'\mathrm{L}_i = \bar{\varphi}^2\,'\overline{\mathrm{L}}_i + \frac{d\bar{\varphi}}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \dot{q}^i} \,.$$

On achève donc la démonstration comme dans le cas holonome.

---

1 On généralise ces équations sans peine au cas rhéonome.