Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CUBIQUES D'EDOUARD LUCAS
Kapitel: coniques inscrites à normales concourantes.
Autor: Turrière, E.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28591

Les coniques inscrites à normales concourantes.

11. — Considérons les coniques inscrites dans le triangle de référence et telles que les normales aux points de contact soient concourantes. Il est évident que l'on se trouve dans les conditions du problème qui a conduit aux deux premières cubiques, puisque les droites qui joignent les sommets aux points de contact de toute conique inscrite concourent. Le point de Gergonne P décrit la première cubique, tandis que le point de concours Q des normales décrit la seconde.

Soient (x, y, z) les coordonnées de Q; X, Y, Z celles de P (coordonnées normales). Les équations qui conduisent à celles des cubiques sont:

$$\frac{Y}{y + x\cos C} = \frac{Z}{z + x\cos B},$$

$$\frac{Z}{z + y\cos A} = \frac{X}{x + y\cos C},$$

$$\frac{X}{x + z\cos B} = \frac{Y}{y + z\cos A}.$$

Soient ξ, η, ζ les coordonnées barycentriques de P. La conique inscrite admettant ce point de Gergonne a pour équation

$$\sqrt{\frac{\xi}{\xi_1}} + \sqrt{\frac{\eta}{\eta_1}} + \sqrt{\frac{\zeta}{\zeta_1}} = 0 ,$$

et les coordonnées de son centre sont:

$$\xi_0 = \xi_1(\eta_1 + \zeta_1) , \quad \text{etc.} \dots$$

ou encore

$$\xi_0 = \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\zeta_1}, \qquad \text{etc.} \dots$$

D'où résultent les formules inverses

$$\frac{1}{\xi_1} = \eta_0 + \zeta_0 - \xi_0 , \quad \text{etc.} \dots$$

De l'équation

$$\Sigma\, a^2 \frac{\eta_1 - \zeta_1}{\eta_1 + \zeta_1} = 0$$

de la première cubique, résulte l'équation du lieu du centre de la conique inscrite:

$$\Sigma\, a^2 \frac{\eta_0 + \zeta_0}{\xi_0} = 0 \, .$$

Le lieu du centre de la conique inscrite est donc une troisième cubique circonscrite au triangle, dont l'équation est:

$$\sum a^2 \eta\zeta(\eta - \zeta) = 0 \, ,$$

$$\sum \alpha\xi(\eta - \zeta)(\eta + \zeta - \xi) = 0 \, ,$$

$$\sum \frac{x}{a}(y^2 - z^2) = 0 \, .$$

Les coniques circonscrites a normales concourantes.

12. — En coordonnées normales, la condition d'orthogonalité de deux droites

$$z = my \, , \qquad z = m'y \, ,$$

issues du sommet A est

$$\underline{1 + mm' + (m + m') \cos A = 0 \, .}$$

Une conique circonscrite d'équation

$$\frac{\mathcal{A}}{x} + \frac{\mathcal{B}}{y} + \frac{\mathcal{C}}{z} = 0 \, ,$$

est tangente en A à la droite

$$\mathcal{B}z + \mathcal{C}y = 0 \, ,$$

et par suite la normale en A a pour équation

$$\frac{z}{y} = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{C} \cos A}{\mathcal{C} - \mathcal{B} \cos A} \, .$$

La condition de concours des normales en ABC à une même conique circonscrite est donc

$$\frac{\mathcal{B} - \mathcal{C} \cos A}{\mathcal{C} - \mathcal{B} \cos A} \cdot \frac{\mathcal{C} - \mathcal{A} \cos B}{\mathcal{A} - \mathcal{C} \cos B} \cdot \frac{\mathcal{A} - \mathcal{B} \cos C}{\mathcal{B} - \mathcal{A} \cos C} = 1 \, .$$